प्राचीन वैदिक गणित

पुष्प-1

मुस्कराता गणित :

सूत्र :

1 एकाधिकेन पूर्वेण
2 निखिलं नवतः चरमं दशतः
3 ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्
4 परावर्त्य योजयेत्
5 शून्यं साम्यसमुच्चये
6 (आनुरूप्ये) शून्यमन्यत्
7 संकलनव्यवकलनाभ्याम्
8 पूरणापूरणाभ्याम्
9 चलनकलनाभ्याम्
10 यावदूनम्
11 व्यष्टिसमष्टिः
12 शेषाण्यङ्केन चरमेण
13 सोपान्त्यद्वयमन्त्यम्
14 एकन्यूनेन पूर्वेण
15 गुणितसमुच्चयः
16 गुणकसमुच्चयः

डॉ. नरेन्द्र पुरी

*

आ नो भद्राः क्रत्वो यन्तु विश्वतः

...le thoughts come to us from every side.
(Rig. Veda, 1-89-i)

दिनांक	सदस्य संख्या	दिनाँक	सदस्य संख्या

पुस्तक-वितरण की तिथि नीचे अंकित है। इस तिथि सहित २० वें दिन तक यह पुस्तक पुस्तकालय में वापिस आ जानी चाहिए। अन्यथा १० पैसे के हिसाब से विलम्ब-दण्ड लगेगा।

"वेद सम्पूर्ण ज्ञान के अनादि-अनन्त स्रोत हैं।"

"प्राचीन वैदिक गणित"

'सोलह वैदिक सूत्रों से गणितीय समस्याओं के जादुई हल'

पुष्प-1

डा० नरेन्द्र पुरी
बी. ई. (सिविल), एम. ई. (स्ट्रक), पी. एच. डी.,
एम. आई. जी. एस., एम. आई. ए. क्यू. आर.,
एफ. आई.एस.डी.टी., एम.आई.एस.टी.ई.,
एम. आई. एस. एच. एम.
रीडर जनपद अभियान्त्रिकी विभाग
रुडकी, विश्वविद्यालय रुडकी।

प्रकाशक :
स्परिच्यूल साइंस सीरीज, रुड़की

प्रथम संस्करण : (अंग्रेजी) गुरु पूर्णिमा जुलाई, 86
(हिन्दी) स्वतन्त्रता दिवस, 86
द्वितीय संस्करण : हिन्दी, गुरु पूर्णिमा, जुलाई, 88

☐ प्रकाशक :

श्रीमति मीनाक्षी पुरी
स्पिरिच्यूल साईंस सीरीज
41/2 आमोद कुंज, रुड़की विश्वविद्यालय
रुड़की-247 667 (यू० पी०)

मुद्रक : गजेन्द्रा प्रिंटिंग प्रेस, नवीन शाहदरा, दिल्ली-32

प्रात: प्रभृति सायान्तम्
सायन्त: प्रातदन्तम्
यत् करोमि जगन्नाथ
तदस्तु तव पूजनम्

सुबह से शाम तक, शाम से सुबह तक,
मैं जो कुछ भी करता हूं, हे जगन्नाथ
सब तेरी ही पूजा, तेरी ही उपासना हो जाए।

"पूज्य स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ जी
के चरण कमलों में सादर समर्पित"

आपने वैदिक गणित के बारे में अवश्य ही सुना होगा। जिसने भी इसका थोड़ा सा अध्ययन किया है उसने इसकी ओर अधिक जानकारी प्राप्त करने की उत्सुकत्ता दिखाई है : स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ जिन्होंने वैदिक गणित की अद्वितीय प्रणाली को पुन: खोज निकाला है कहते हैं "केवल 120 शब्दों के सोलह सूत्र सभी गणितीय समस्याओं को हल करने में समर्थ हैं।" इस प्रणाली का परिचय देने वाली 40 अध्यायों की पुस्तक उपलब्ध है। यह प्रणाली इंग्लैंड में पहले ही प्रकाश में आ चुकी है और विभिन्न स्कूलों एवं कालेजों के पाठ्यक्रम में पढ़ाई जा रही है।

"मैं वैदिक गणित में अपरिमित सामर्थ्य देखता हूँ"
—प्रोफेसर के० विलियम
लन्दन

आधुनिक युग में

वैदिक गणित के संचालक

"वैदिक गणित" पुस्तक के रचयिता स्वामी भारती कृष्ण-तीर्थ गोवर्धन पीठ के शंकराचार्य थे। जगद्गुरू जी बचपन में वेंकटरमन के नाम से जाने जाते थे। वह तीव्र कुशाग्र बुद्धि के विद्यार्थी थे एवं उन्होंने अपनी शिक्षा काल में प्रत्येक विषय में प्रथम स्थान प्राप्त किया था।

स्नातकी में उच्चतम स्थान प्राप्त करने के पश्चात् श्री वेंकटरमन सरस्वती, 1903 में 'अमेरिकन कालेज आफ साईन्सिस' न्यूयार्क के बम्बई केन्द्र से स्नातकोत्तर, परीक्षा में बैठे एवं 1904 में केवल 20 वर्ष की अल्पायु में एक साथ सात विषयों में परीक्षा देकर सभी विषयों में उच्चतर स्थान प्राप्त किया। जिसने अद्वितीय शैक्षिक योग्यता का अद्भुत विश्व रिकार्ड कायम किया। उनके विषय संस्कृत, दर्शनशास्त्र, इंग्लिश, गणित, इतिहास एवं विज्ञान आदि थे।

प्रस्तावना

वेद समस्त ज्ञान के स्रोत हैं। वे न केवल प्राचीनतम, अपितु सर्वश्रेष्ठ भी हैं। वेदों से प्रेरणा पाकर लाखों लोगों ने ज्ञान के पथ का अनुसरण किया है। समय के साथ-साथ वैदिक ज्ञान का विशाल भण्डार नष्ट हो चुका है, अथवा लुप्त हो चुका है। वैदिक गणित भी इसका अपवाद नहीं हैं। यह प्रेरणादायक तथ्य है कि पुनः वैदिक ज्ञान की ओर विश्व के वैज्ञानिकों की रुचि जागृत हुई है।

ज्ञान की अनेकाविध शाखाओं के ज्ञाता, मानव इतिहास में गिने चुने ही हुये हैं। श्री मद् भारती कृष्ण तीर्थ जी भी उन अमूल्य रत्नों में से एक हैं। वेदों पर लिखे गये भाष्य में एक टिप्पणी "वेदों में एक त्रुटि" ने इनके हृदय को उद्वेलित कर दिया। स्वामी जी ने युगीय पुरातन भारतीय साधन, योग एवं ध्यान के द्वारा वैदिक गणित पुनः विकसित कर उसे प्रयोगिक रूप प्रदान किया। उन्होंने 16 संस्करण लिखे, परन्तु केवल एक पुर्नलिखित परिचयात्मक संस्करण के अतिरिक्त कोई अन्य सामग्री ज्ञान के सच्चे शोधकर्ता की प्रेरणा एवं पद-प्रदर्शन के लिये उपलब्ध नहीं है। मैं उनके पावन चरण कमलों मे शतशः प्रणाम करता हूँ।

हर व्यक्ति जो वैदिक गणित का थोड़ा सा भी ज्ञान प्राप्त करता है उसका इस विषय को और अधिक जानने का उत्साह उत्तरोत्तर बढ़ता जाता है। छात्रों की रुचि एवं उनकी अनुक्रियाओं ने ही हमें इस अर्जित ज्ञान को क्रमबद्ध रूप में प्रस्तुत करने को उत्साहित किया।

प्राचीन वैदिक गणित की यह एक विशेषता है, कि जैसे ही

आप इस पद्धति का प्रयोग करेंगे, नयी-नयी कड़ियां स्वयं ही आपके मस्तिष्क में आने लगेंगी। भारत भूमि के दूर दराज प्रदेशों में रहने वाले व्यक्तियों, विशेषतः छात्रों ने नई कड़ियों को एकत्रित करने में मेरा योगदान दिया। (इस पुस्तक में अध्याय 2, 3, 4, 8, 9, 11 मूल पुस्तक के अतिरिक्त जोड़े गये हैं।

हम पूर्व प्रतिपादित कड़ियो को एक क्रमबद्ध 'पुष्प माला' के रूप में प्रस्तुत कर रहे हैं, जो कि छात्रों व अध्यापकों द्वारा सरलता से समझी एवं प्रयोग की जा सकें। कहीं-कहीं पर लेखन कार्य सरल शीर्षको पर भी बहुत लम्बा हो गया है। लेकिन एक बार पढ़ने एवं अभ्यास करने से मूल क्रियाओं को अत्यन्त द्रुत गति से किया जा सकेगा। मुक्त आलोचनाओ का हम सहर्ष स्वागत करते हैं क्योंकि यह भविष्य के प्रकाशनों में सहयोगी सिद्ध होगी। यह समस्त कार्य एक 'ज्ञान यज्ञ' के भाव से किया जा रहा है। मैं, हमारे सभी निस्वार्थ सहयोगियों को उनके इस देश एवं सस्कृति प्रेम से ओत-प्रोत कार्य के लिये धन्यवाद करता हूँ। मैं विशेष रूप से डा० मिश्रा, श्री बोध स्वरूप पाण्डयाल (नेपाल), डा० रामचन्द्र, कुमारी माया, दिव्या एवं श्रुति का आभारी हूं।

इस हिन्दी रूपान्तर में श्रीमति मीनाक्षी जोशी एवं श्री विकास गर्ग के अनुवाद कार्य मे योगदान के लिये विशेष आभारी हूं। प्रकाशन कार्य में श्री विनय कुमार मित्तल ने सहयोग दिया।

ईश्वर से प्रार्थना है कि यह वैदिक गणित का उपहार आनन्ददायी हो और इससे प्रेरित होकर वैदिक गणित आपके लिये कठिन विषय नही अपितु मनोरंजक विषय बन जाए।

—लेखक

विषय-सूची

प्राचीन वैदिक गणित

उल्लेखनीय तथ्य :

- ☐ एक सम्पूर्ण पद्धति
- ☐ दृढ़ वैज्ञानिक दृष्टिकोण
- ☐ सभी प्रतियोगिताओं के लिये वरदान जैसे केन्द्रीय एवं अर्थ-शास्त्र विज्ञान, यू० पी० एस० सी०, इंजीनियरिंग, बैंक, ओ० एन० जी० सी०, मेडिकल आदि जहाँ गणक का प्रयोग वर्जित होता है।
- ☐ अध्ययन के दृष्टिकोण में क्रान्ति
- ☐ शोध एवं विकास के लिये नवीन दृष्टिकोण
- ☐ अंकों के विशिष्ट, अज्ञात एवं गुप्त गुणों का ज्ञान
- ☐ साधारण, लघु एवं गणित की जादुई गति की प्रणाली
- ☐ विशेष पूर्व पाठ्यक्रम आवश्यक नहीं।
- ☐ विशेष सन्दर्भ में आधुनिक कम्प्यूटर की अपेक्षा अधिक उपयोगी एवं सही।
- ☐ कई बार गणक (Calculator) को भी मात करने वाली।
- ☐ केवल दो घण्टे प्रति दिन 11 महीने तक अभ्यास करने से भारत एवं विदेशों के 12 वर्षीय पाठ्यक्रम के समकक्ष योग्यता।

वैदिक गणित समाचार

"उन्हें (भारतीयों को) कम्प्यूटर वैज्ञानिक मान लेना बहुत मोहक प्रतीत होता है । हमें यह नहीं भूलना चाहिये कि शून्य एवं द्विअकीय प्रणाली (Binary System) आदि महत् आविष्कार भी भारतीय विचारकों ने पश्चिम से हजार वर्ष पहले ही कर लिये थे ।" (डॉ० आर० ब्रिगस) (NASA)

कैलिफोर्निया आर्टिफिशयल इन्टेलिजेन्स (यन्त्र मानव) की शोध पत्रिका से अनुदित) ।

1. "वैदिक मैथमैटिक्स" पुस्तक स्कूल आंफ इक्नामिक्स साइन्स लन्दन, सेन्ट जेम्स स्कूल लन्दन, स्कूल आफ फिलास्फी आस्ट्रेलिया आदि में पढ़ाई जा रही है ।

2. यह पुस्तक अंक गणितीय संगणनाओं, संख्या पद्धति, मिश्रित गुणन, बीज गणितीय क्रियाओं, गुणन खण्ड, सरल द्विघातीय समीकरण, आंशिक भिन्न, कलावकलन, वर्ग एव घन—क्रियाओं वर्गमूल, धनमूल निर्देशांक ज्यामिति एवं अद्वितीय वैदिक गणित सकेताक्षरों के विलक्षण अनुप्रयोगों से अवगत कराती है ।

3. लन्दन में एक विशेष पाठ्यक्रम के द्वारा यह प्रदर्शित किया जा रहा है कि वैदिक गणित प्रणाली गणित के उच्च स्तरीय पाठ्यक्रम (जी० ई० सी० ए-स्तर) के अनुरूप प्रयोग की जा सकती है । इन पाठ्यक्रमों की योजना "मेरी वार्ड सेन्टर" में पोलेटेक्नीक ऑफ नार्थ लन्दन के सहयोग से चलाई जा रही है ।

4. इस पुस्तक का अनुवाद हिन्दी एवं तीन विदेशी भाषाओं में (जिनमें लेटिन एवं जर्मनी भी है) किया जा रहा है। इसका मराठी अनुवाद चार भागों में प्रकाशित हो चुका है।

5. इस विलक्षण भारतीय प्रणाली पर इंग्लैण्ड में अनुसन्धानात्मक कार्य भी किया जा रहा है। इस शोध में वैदिक गणित के त्रिकोणमिति, त्रिविमीय, निर्देशांक, ज्यामिति समतलीय एवं गोलीय त्रिभुजों के हल, रैखिक एवं बहु रैखिक अवकल समीकरण, सारणिक एवं लघु गणकीय चरघांताकी समीकरणों के हल में वैदिक सूत्रों के प्रयोगों का समावेश है।

6. सबसे उल्लेखनीय तथ्य यह है कि वैदिक गणित अनेक समीकरणों के अद्वितीय हल देता है, जिन्हें आधुनिक गणित में शेषफल प्रमेय विधि के प्रयोग के द्वारा ही हल किया जा सकता है। उदाहरण के लिए "केपलर समीकरण" के लिये सुलभ शेष फल जैसी क्लिष्ट विधि की तुलना में वैदिक गणित पद्धति से केवल 90 सैकिंड में ही हल किया जा सकता है।

आमन्त्रण : भाऽग पुस्तकों के अतिरिक्त खोई कड़ियों के प्रवेश भेजने के लिये आमन्त्रित करती है।

वैदिक गणित की झलकियाँ—पुस्तक डाक द्वारा 2·50 में उपलब्ध है। सूचना एवं अन्य विवरण एक रुपये में प्राप्त किया जा सकता है।

वैदिक गणित पर लिखी गयी पुस्तकों की सूची

1. "इन्ट्रोडक्ट्री लेक्चर्स आन वैदिक मैथमैटिक्स" द्वारा ए० पी० निकल्स, जे० आर० पिकल्स एवं के० विलियम।

2. "डिसकवर वैदिक मैथमैटिक्स" द्वारा के० विलियम।

3. "ट्रिपल्स" द्वारा के० विलियम (शोध-पुस्तक)।

4. "वरटीकली एवं क्रास वाईस" उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् (सूत्र 3) द्वारा ए० पी० निकल्स, के० विलियम एवं जे० आर० पिकल्स।

5. प्राचीन वैदिक गणित– पुष्प 1 व पुष्प 2 द्वारा डा० नरेन्द्र पुरी (हिन्दी व अंग्रेजी में) पुष्प माला का अनुवाद विदेश की 36 भाषाओं में किया जा रहा है।

6. वैदिक गणित कार्यशाला- बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय (हिन्दी व अंग्रेजी में) 1987.

7. वैदिक गणित व इसकी संगणनीय क्षमता ए- रूडकी विश्व-विद्यालय कार्यशाला (अंग्रेजी में) 1987.

8. An Over view of Vedic Maths डा० नरेन्द्र पुरी कार्यशाला मानव संसाधन विकास मन्त्रालय (अंग्रेजी में) जयपुर 1988.

रूड़की में सम्पन्न कार्य

रूड़की विश्वविद्यालय के अध्यापकों एवं छात्रों द्वारा निर्मित "आध्यात्मिक अध्ययन संस्था" ने हमारे इस अमूल्य, विस्तृत वैज्ञानिक एवं सांस्कृतिक परम्परा के अद्वितीय गणितीय विषय के प्रचार एवं प्रसार के लिये विनम्र प्रयास प्रारम्भ किया है।

विश्व भर के विभिन्न संस्थानो में इस विषय पर व्याख्यान श्रृंखला का आयोजन किया जा रहा हैं। इस श्रृंखला में भारत के प्रमुख नगरों व विदेशों में अमेरिका, इग्लैंड, कनाडा, मैक्सिको, नार्वे, स्वीडन, फिनलैंड, डेनमार्क, हंगरी, इटली, जर्मनी, स्विटजरलैंड, स्पेन, हालैंड आदि मे सैकड़ो वक्तव्य दिए जा चुके हैं।

मई १९८५ से लेकर मई १९८८ तक ३७ पाठ्यक्रम भारत व अमेरिका मे आयोजित किए जा चुके हैं। इन पाठ्यक्रमों में २७०० लोगो, जिनमें कक्षा ५ के बच्चों से लेकर, स्कूल अध्यापक विश्वविद्यालयो के छात्र, शोधकर्त्ता, प्राध्यापकगण, कम्पयूटर विशेषज्ञ व प्रोफेसर आदि ने भाग लिया।

आSम के वैदिक विज्ञान संस्थान द्वारा महाकुम्भ (बैशाखी) १९८६ से वैदिक गणित के पत्राचार पाठ्यक्रम चलाए जा रहे हैं। यह पाठ्यक्रम छः माह की अवधि का है व हिन्दी/अंग्रेजी दोनो भाषाओ में उपलब्ध है। हर बैशाखी व दशहरे से नया सत्र प्रारम्भ होता है। सातवी कक्षा पास कोई भी व्यक्ति इसमें सम्मिलित हो सकता हैं। विस्तृत जानकारी व आवेदन पत्र के लिए मात्र रु० १०/- भेजें (साधारण डाक से)।

अभी तक नागपुर, लन्दन, रुडकी, वाराणसी, दिल्ली, जयपुर, बंगलौर, आक्सफोर्ड, कैम्ब्रिज, फेयरफील्ड (अमेरिका), टोरंटो, मैक्सिको, कोपनहेंगन, ओसलो, तुर्कु, रोम, मिलान, स्टैनफोर्ड, बर्लिन, जेनेवा आदि विश्वविद्यालयों में कार्यशालाए आयोजित हो चुकी हैं। जयपुर की कार्यशाला मानव संसाधन विकास मन्त्रालय द्वारा आयोजित की गई थी।

विदेशो की कार्यशालाए महर्षि महेश योगी जी के अन्तरराष्ट्रीय संस्थान द्वारा आयोजित की गई। इन सभी विदेशी कार्यशालाओ मे लेखक डा० नरेन्द्रपुरी ने वक्तव्य दिए।

वैदिक गणित पर वीडियो कैसेट भी तैयार किए जा रहे हैं।

प्राचीन वैदिक गणित पुस्तक

भारतीय सांस्कृतिक परम्परा के इस अद्वितीय विषय की जानकारी के लिये एस० एस० एस० ने वैदिक गणित पुस्तकों की पुष्प माला प्रकाशित करने की योजना बनाई है। एस० एस० एस० अत्यन्त विनम्रता से इस माला की प्रथम पुस्तक (हिन्दी एवं अंग्रेजी) पुष्प-1 प्रकाशित की है। पुष्प-2 दीपावली के शुभ पर्व तक उपलब्ध होगा।

विषय सूची : प्राचीन वैदिक गणित

"आऽस" के सदस्यों के विनम्र प्रयास के फलस्वरूप वैदिक गणित की कुछ खोयी कड़ियों को फिर से जोड़ने का प्रयास किया गया है। विशेषत: योग करने की तीव्र वैदिक प्रणाली। गुणा की आधार प्रणाली का विस्तार, तीन या तीन से अधिक अंकों की गुणा, एक पंक्ति में। बड़े अंकों के वर्ग निकालना, बीजगणित एवं अंकगणित की जमा, घटा, गुणा, गुणन खण्ड, भाग को जाँचने की वैदिक प्रणाली को पुनः विकसित किया जा चुका है। इनमें से सभी विषयों की जानकारी उपरोक्त पुस्तकों में प्राप्त होगी।

प्राचीन वैदिक गणित

"वैदिक गणित के पाठ्यक्रम में भाग लेने वालों के विचार"

वैदिक गणित के द्वारा किसी भी गणितीय समस्या का समाधान, बहुत कम सयय में, लगभग जादुई गति से किया जा सकता है। वैदिक सूत्रों से होने वाली गणनायें, पाठक को आश्चर्यजनक उत्साह से भर देती हैं।

आsस द्वारा चलाये गये 37 कोर्सों में भाग लेने वाले कक्षा पाँच से ऊपर के विद्यार्थी, स्कूलों के अध्यापक, विश्वविद्यालय के छात्र, रिसर्च स्कॉलर तथा विश्वविद्यालय के प्राध्यापकों का उत्साह देखते ही बनता था। प्रत्येक कोर्स के अन्त में लोगों की राय जानने के लिये "अनुक्रिया फार्म भरवाया गया जिसमें वैदिक व प्रचलित गणित की तुलना के ऊपर ग्यारह प्रश्न थे। वैदिक गणित का समर्थन करने वाले प्रत्येक प्रश्न के पक्ष में पाठकों की कम से कम 90% राय थी। अधिकतर प्रश्नों ने शत प्रतिशत समर्थन प्राप्त किया।

पाठकों की प्रतिक्रिया की एक झलक

—प्रत्येक प्रतियोगात्मक परीक्षा के लिये वरदान।

—अत्यन्त रोचक। हमारी कल्पना से परे।

—विश्वविद्यालय के प्राँगण में इसका आयोजन अत्यन्त सुखद है।

—हमारे पूर्वज गणित में भी इतने उन्नत थे।

—यदि वैदिक गणित हमें आरम्भ से पढ़ाया जाता तो कम्पयूटर भारत में बनते, विदेशों में नहीं।

—शानदार।

—मैं गहराई से इसका अध्ययन करना चाहता हूँ।

—यह भारत और उसकी महान् संस्कृति के प्रति हमारी श्रद्धा और अधिक बढ़ाता है।

—मैं संस्कृत सीखना चाहता हूँ, जिससे कि मैं प्राचीन भारतीय विज्ञान के बारे में जान सकूं।

—विश्व के प्रत्येक व्यक्ति को 'वैदिक गणित' का ज्ञान होना चाहिये।

—दशहरे की छुट्टियों में वैदिक गणित को सीखना एक वरदान रहा।

—मैं वैदिक गणित से गुणन खंड आदि कठिन विषयों को भी सीखना चाहता हूँ।

—आश्चर्यजनक गति, विस्तृत अनुप्रयोग तथा गणित की प्रत्येक क्रिया को सजाये हुये।

—इसके प्रयोग से शिक्षा के क्षेत्र में क्रान्ति सम्भव है।

—छोटे-छोटे बच्चों के लिये अनिवार्य रूप से पढ़ाया जाना चाहिये।

—अंकों की रहस्यमय प्रकृति की जानकारी देता है। थोड़े से अभ्यास के बाद वैदिक गणित से मानसिक गणना सम्भव।

—अत्यन्त शिक्षाप्रद, आने वाली पीढ़ी को प्रारम्भ से ही इसका अभ्यास कराया जाना चाहिये।

—वैदिक गणित 'प्राचीन भारतीय संस्कृति' की महान देन।

—बच्चों के लिये भार नहीं बल्कि—गणित मनोरंजक विषय बन जाता है।

ॐ

* प्रार्थना *

ॐ तेजोऽसि तेजोमयि देहि
वीर्यमसि वीर्यमयि देहि
ओजोमसि ओजोमयि देहि
बलमसि बलंमयि देहि
अविराविगयी ।

हे तेज के पुन्ज हमें तेज दो ।
हे वीर्य के पुन्ज हमें वीर्यवान् बनाओ
हे ओजस्व स्वरूप हमें ओजस्व दो
हे बल के पुन्ज हमें बल प्रदान करो
हमें अपने स्वरूप की ओर अग्रसर करें ।

ॐ सहनाववतु सहनौ भुनक्तु सह वीर्यं करवावहै ।
तेजस्विनावधीतमस्तु मा विद्विषावहै ॥
ॐ शान्तिः शान्तिः शान्तिः ।

हे परमात्मा हम दोनों की रक्षा करो । हम दोनों का पालन करो । हम दोनों साथ में रहकर तेजस्वी दैवी कार्य करें । हम दोनों का किया हुआ अध्ययन तेजस्वी दैवी हो और हम दोनों परस्पर एक दूसरे का द्वेष न करें ।

आधार पद्धति
(BASE SYSTEM)

वैदिक गणित में आधार पद्धति का प्रयोग करने से बहुत सी गणित प्रणालियाँ आसान हो जाती हैं । आधार सदैव 10 की घात अथवा 10 होता है ।

उदाहरणार्थ—10, 100, 1000, 10,000 इत्यादि ।

आधार से विचलन—

1. हम उस संख्या को आधार के रूप में प्रयोग करते हैं जो कि गुणा करने वाली संख्याओं के निकट हों ।

2. वे संख्यायें जिनका मान लिये गये आधार से अधिक होता है, उनमें आधार से अन्तर को धनात्मक चिन्ह के साथ, उन संख्याओं के साथ लिखा जाता है ।

3. वे संख्यायें जिनका मान लिये गये आधार से कम होता है, उनमें आधार से अन्तर को ऋणात्मक चिन्ह के साथ लिखा जाता है । विचलन को सीधे ही निखिलं सूत्र से प्राप्त करते हैं, (सूत्र क्र० 2) सूत्र का अर्थ है, 'प्रत्येक को 9 से तथा अन्तिम को 10 से' यदि संख्या आधार से छोटी है ।

उदाहरण—

1·1 यदि संख्या 103 हो—

यहां पर आधार 100 है और संख्या आधार से 3 अधिक है तो 103 को निम्न प्रकार से लिखेंगे— 103+3

1·2 यदि संख्या 115 है :

यहां पर आधार 100 है, और सख्या आधार से 15 अधिक है— 115+15

1·3 संख्या 1012 है :

यहाँ पर आधार 1000 है और संख्या आधार से 12 अधिक है इसे निम्न प्रकार से लिखेंगे— 1012+012

1·4 यदि संख्या 13 है :

यहां पर आधार 10 है और 13 इससे 3 अधिक है इसे निम्न ढंग से लिखेंगे— 13+3

1·5 यदि संख्या 10004 है :

यहाँ पर आधार 10000 है और संख्या आधार से 4 अधिक है। इसे 10004+0004 लिखेंगे।

1·6 यदि संख्या 9 है :

यहाँ पर आधार 10 है और संख्या 1 कम है इसे इस प्रकार लिखेंगे— 9−1

1·7 यदि संख्या 92 है :

यहाँ पर आधार 100 है और संख्या 8 कम है इसे इस प्रकार लिखेंगे— 92−8

1·8 यदि संख्या 991 है :

यहाँ पर आधार 1000 है और संख्या 9 कम है इसे इस प्रकार लिखेंगे— 991−009

निखिलं सूत्र के प्रयोग से हमें 9−9=0 ; 9−9=0 तथा 10−1=9 मिलता है, अतः विचलन =−009 है।

1·9 संख्या 75 है :

यहाँ पर आधार 100 है और संख्या 25 कम है इसे इस प्रकार लिखेंगे— 75 – 25

1·10 यदि संख्या 971 है :

यहाँ पर आधार 1000 है और 29 कम है इसे इस प्रकार लिखेंगे— 971 – 029

निखिलं सूत्र के प्रयोग से हमें 9 – 9 = 0 ; 9 – 7 = 2 तथा 10 – 1 = 9 मिलता है, अतः विचलन = – 029 है।

1·11 यदि संख्या 9975 है

यहाँ पर आधार 10000 है संख्या 25 कम है इसे 9975 – 0025 लिखेंगे।

टिप्पणी—यदि संख्या का आधार से अन्तर बहुत अधिक हो तो एक उप-आधार का प्रयोग किया जा सकता है। उप-आधार के लिये आधार का गुणक होना आवश्यक है।

उदाहरणार्थ—मान लें संख्या 41 है, यदि हम आधार लेते हैं 10 तो यह 31 अधिक है, यदि हम यहाँ पर आधार 100 लेते हैं तो यह 59 कम है। इसलिए हम 10 या 100 में से कोई भी आधार न लेकर उपयुक्त उपआधार का प्रयोग करते हैं।

(इसे क्रमागत अध्यायों में समझाया जायेगा)।

अभ्यास :

प्रश्न 1. निम्नलिखित संख्याओं के लिये उपयुक्त आधार का प्रयोग करते हुये इन्हें वैदिक आधार पद्धति में लिखो—

(क) 107 (ख) 12 (ग) 97 (घ) 19

(च) 112 (छ) 975 (ज) 10008
(झ) 9999 (ट) 89 (ठ) 75 (ड) 29

प्रश्न 2. निम्नलिखित संख्याओं के लिये चुने गये आधार व वैदिक पद्धति में संख्याओं को लिखा गया है, सही और गलत की जाँच करते हुये सही उत्तर लिखो।

	संख्या	आधार	वैदिक पद्धति	टिप्पणी
(i)	111	100	111+11	
(ii)	6	10	6—4	
(iii)	97	100	100—3	
(iv)	107	100	100+3	
(v)	992	1000	992+8	
(vi)	9972	1000	1000—22	
(vii)	10025	10000	10025—25	

प्रश्न 3. संख्याओं के सही आधार लिखे हैं, संख्याओं का आधार से कितना विचलन है, यह भी लिखा है। सही संख्या और उन संख्याओं को वैदिक आधार पद्धति में लिखो—

	आधार	विचलन	सही संख्या	वैदिक आधार पद्धति
(i)	10	3	13	13 3
(ii)	10	—3		
(iii)	100	—7		
(iv)	1000	14		
(v)	1000	—19		
(vi)	100000	—31		
(vii)	1000	374		

अध्याय-2

घटा
(SUBTRACTION)

2·1 परिचय :

वैदिक गणित के किसी भी प्रश्न में घटाने को, कई साधारण योग व घटाने के क्रम में क्रमानुसार परिवर्तित किया जाता है।

जब भी किसी संख्या के बड़े अंक को छोटे अंक से घटाना हो तो हम 'शुद्धः' सूत्र का प्रयोग करेंगे। घटाने की विधि निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा स्पष्ट हो जायेगी।

2·2 उदाहरण 1 :

$$\begin{array}{r} 5\ 7 \\ -3\ 2 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

चरण 1 : यहाँ 2 अंक इकाई स्थान पर 7 से छोटा है इसलिये 7 − 2 = 5 (यहाँ पर शुद्धिकरण की कोई आवश्यकता नहीं है)।

चरण 2 : अंक 3 दहाई स्थान पर भी 5 से छोटा है इस प्रकार 5 − 3 = 2 (यहाँ पर भी शुद्धिकरण की आवश्यकता नहीं है)।

$$\begin{array}{r} 57 \\ -32 \\ \hline 25 \\ \hline \end{array}$$

2·3 उदाहरण 2 :

$$\begin{array}{r} \dot{4}2 \\ -27 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

चरण 1 : यहाँ पर 7 इकाई अंक 2 मे ज्यादा है—इसलिये शुद्धिकरण की आवश्यकता है—

(अ) यहाँ पर आगे वाले अंक (अर्थात् दहाई) जो कि यहाँ पर 2 है उसके ऊपर एक बिन्दु लगा देंगे।

(ब) अब 7 को आधार 10 से घटायेंगे यह जानने के लिये कि यह आधार से कितना कम है 10 − 7 = 3

(स) इस अन्तर को ऊपर वाले अंक में जोड़ देंगे (यहाँ पर ऊपर वाला अंक 2 है) 3 + 2 = 5

(द) प्राप्त अंक उत्तर के इकाई स्थान पर लिखेंगे।

$$\begin{array}{r} \dot{4}2 \\ -27 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}$$

चरण 2 : (अ) अब दहाई स्थान के अंक को देखेंगे।

(ब) इस अंक के ऊपर एक बिन्दु लगा है इसलिये इसे एक अंक से बढ़ा देंगे।

(स) इस प्रकार $2+1=3$, यह दहाई अंक होगा।

(द) अब तुलना करने पर हम देखते हैं कि यह ऊपर के दहाई अंक से कम है इस प्रकार शुद्धिकरण की आवश्यकता नहीं पड़ेगी।

(ध) उत्तर में दहाई स्थान प्राप्त करने के लिये घटायेंगे।

$$4-3=1 \qquad \begin{array}{r} 42 \\ -\dot{2}7 \\ \hline 15 \\ \hline \end{array}$$

2·4 उदाहरण 3 :

$$\begin{array}{r} 415 \\ -208 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

चरण 1 : यहाँ पर इकाई अंक 8, 5 से बड़ा है, इसलिये शुद्धिकरण की आवश्यकता है।

(अ) दूसरे अंक अर्थात् दहाई अंक के ऊपर एक बिन्दु रखेंगे, यहाँ पर अंक 0 है।

(ब) अब अंक 8 को आधार 10 से घटायेंगे यह जानने के लिए कि यह आधार से कितना कम है—

$$10-8=2$$

(स) परिणामी अंक को इकाई स्थान के ऊपरी अंक में जोड़ देंगे। $5+2=7$

(द) इस प्राप्त अंक को उत्तर के इकाई स्थान पर लिख देंगे।

$$\begin{array}{r} 415 \\ -2\dot{0}8 \\ \hline 7 \\ \hline \end{array}$$

चरण 2 : (अ) अब दहाई स्थान को देखेंगे ।

(ब) इस दहाई अंक के एक ऊपर बिन्दु लगा है इसलिये इसे 1 अंक से बढ़ा लेंगे ।

(स) $0+1=1$

(द) इस प्रकार प्राप्त अंक ऊपर लिखे दहाई अंक के बराबर है तो $1-1=0$

$$\begin{array}{r} 4\ 1\ 5 \\ -2\ \dot{0}\ 8 \\ \hline 0\ 7 \\ \hline \end{array}$$

चरण 3 : 2 अंक नीचे लिखे अंकों के सैकड़ा स्थान पर है तथा यह इसके ऊपर लिखे अंक 4 से कम है तो उत्तर इस प्रकार प्राप्त करेंगे ।

$4-2=2$

$$\begin{array}{r} 4\ 1\ 5 \\ -2\ \dot{0}\ 8 \\ \hline 2\ 0\ 7 \\ \hline \end{array}$$

2·5 उदाहरण 4 :

$$\begin{array}{r} 3\ 7\ 5\ 2 \\ -1\ 8\ 7\ 1 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

चरण 1 : इकाई अंक 1, ऊपर लिखे इकाई अंक से छोटा है इस प्रकार 2 – 1 = 1 (यहाँ पर शुद्धिकरण की कोई आवश्यकता नहीं है) ।

चरण 2 : दहाई स्थान पर लिखा अंक 7, ऊपर लिखे अंक से अधिक है इस प्रकार यहाँ शुद्धिकरण की आवश्यकता है । सैंकड़ा के स्थान वाले अंक यानी 8 के ऊपर बिन्दु लगा देंगे । अन्तर प्राप्त करने के लिये अंक 7 को आधार 10 से घटायेंगे । इस प्रकार,

$$10 - 7 = 3 \qquad 3 + 5 = 8$$

$$\begin{array}{r} 3752 \\ -\,1\dot{8}71 \\ \hline 81 \\ \hline \end{array}$$

चरण 3 : यहाँ पर सैंकड़ा अंक के ऊपर एक बिन्दु लगा है इसलिये उस अंक को एक अंक अधिक लिखेंगे । यहाँ पर यह अंक 9 हो जायेगा । यह 9 अंक ऊपर लिखे अंक 7 से ज्यादा है, इसलिये शुद्धिकरण की आवश्यकता होगी और हजार अंक के ऊपर एक बिन्दु लगा देंगे । अन्तर के लिये आधार 10 से घटा देंगे । 10 – 9 = 1 और प्राप्त अन्तर को ऊपर के अंक में जोड़ देंगे । 1 + 7 = 8

$$\begin{array}{r} 3\,7\,5\,2 \\ -\,\dot{1}\,\dot{8}\,7\,1 \\ \hline 8\,8\,1 \\ \hline \end{array}$$

चरण 4 : हजार अंक के ऊपर एक बिन्दु लगा है इसलिये इसे 1 अंक अधिक बढ़ा देंगे, अब यह अंक 1 से 2 हो जायेगा ।

इस अंक के ऊपर लिखे 3 से यह कम है इसलिए शुद्धिकरण की आवश्यकता नहीं है और अन्तर $3-2=1$ हो जायेगा।

$$\begin{array}{r} 3752 \\ -1\dot{8}71 \\ \hline 1881 \\ \hline \end{array}$$

विवेचना :

1. वैदिक गणित में घटा जैसी आसान प्रणाली भी, वर्तमान पद्धति की अपेक्षा कहीं अधिक सरल हो जाती है। इसमें हासिल की आवश्यकता भी नहीं पड़ती।

2. शुद्धिकरण किये जाने वाले अंक के पूरक की गणना इसमें अधिक आसान है तथा क्रमागत जोड़ अधिक शीघ्रता से होता है।

3. मिश्रित घटा की वैदिक पद्धति पुष्प–2 में प्रस्तुत की जायेगी।

अभ्यास :

प्रश्न 1. निम्नलिखित प्रश्नों को वैदिक शुद्धिकरण सूत्र का प्रयोग करते हुये हल करो—

(1) $\begin{array}{r} 36 \\ -28 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (2) $\begin{array}{r} 324 \\ -115 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (3) $\begin{array}{r} 437 \\ -269 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

(4) $\begin{array}{r} 506 \\ -107 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (5) $\begin{array}{r} 728 \\ -89 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (6) $\begin{array}{r} 8472 \\ -3796 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

(7) $\begin{array}{r} 49062 \\ -\ 8648 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (8) $\begin{array}{r} 87211 \\ -\ 3088 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (9) $\begin{array}{r} 98356 \\ -79467 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

(10) $\begin{array}{r} 364237 \\ -270038 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ (11) $\begin{array}{r} 680032 \\ -\ 68810 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

(12) $\begin{array}{r} 10000000 \\ -\ 8764321 \\ \hline \end{array}$ (13) $\begin{array}{r} 6011123 \\ -5020034 \\ \hline \end{array}$

(14) $\begin{array}{r} 100000000 \\ -\ 99999999 \\ \hline \end{array}$

प्रश्न 2. जांच करके पता लगाओ कि वैदिक शुद्धिकरण द्वारा लगाये गये बिन्दु सही हैं अथवा गलत, और इन प्रश्नों को हल करो—

$\begin{array}{r} 25 \\ -\dot{2}2 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 86 \\ -\dot{3}4 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 78 \\ -\dot{6}\dot{9} \\ \hline \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 32 \\ -\dot{2}\dot{1} \\ \hline \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 33 \\ -\dot{2}3 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

प्रश्न 3. निम्नलिखित प्रश्नों में कहाँ पर शुद्धिकरण की आवश्यकता है।

$\begin{array}{r} 36 \\ -24 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 24 \\ -16 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 20 \\ -11 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 38 \\ -20 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 93 \\ -33 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

प्रश्न 4. निम्नलिखित प्रश्नों के दिए अन्तरों की जांच करो—

$$
\begin{array}{r}
36 \\
-\dot{2}4 \\
\hline
12 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
33 \\
-\dot{2}4 \\
\hline
09 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
30 \\
-\dot{2}7 \\
\hline
03 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
28 \\
-\dot{1}9 \\
\hline
19 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
38 \\
-\dot{2}9 \\
\hline
09 \\
\hline
\end{array}
$$

प्रश्न 5. उन अंकों को एक वृत्त के अन्दर कर दो जिनमें शुद्धिकरण बिन्दु ठीक नहीं लगे हैं, और प्रश्नों को पूरा करें।

$$
\begin{array}{r}
37209 \\
-19\dot{1}\dot{1}\dot{7} \\
\hline
\\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
27569 \\
0\dot{8}4\dot{7}7 \\
\hline
\\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
78952 \\
2\dot{9}\dot{7}\dot{7}\dot{8} \\
\hline
\\
\hline
\end{array}
$$

अध्याय-3

जोड़
(ADDITION)

3·1 परिचय :

वैदिक गणित में योग की विधि को बहुत सरल क्रम में बदल दिया गया है, हर अंक हमेशा 10 से कम ही रहता है। जब भी योग 10 से बढ़ जाता है वहीं पर सरल सूत्र शुद्धः का प्रयोग होता है। नीचे के उदाहरणों में सरल चरण क्रम द्वारा इसे समझाया गया है।

3·2 उदाहरण 1 :

$$\begin{array}{r} 379 \\ 854 \\ +767 \\ 426 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

चरण 1 : यहां योग साधारण विधि की तरह एक-एक पंक्ति का किया गया है।

(अ) 6 और 7 का योग करने से 13 हुआ जो कि 10 से बड़ा है अतः शुद्धः प्रयुक्त किया जायेगा और 7 के ऊपर बिन्दु लगा देंगे। दहाई का अंक छोड़ देंगे एवं इकाई का अंक आगे लेंगे। इकाई का अंक 3 अगले अंक में जोड़ा जायेगा।

(ब) 3+4=7 यहां शुद्धिकरण की आवश्यकता नहीं क्योंकि योग 10 से कम है अतः 7+9=16, फिर शुद्धिकरण

का उपयोग करेंगे पुनः अन्तिम अंक 9 पर बिन्दु लगायेंगे। दहाई अंक छोड़कर इकाई का अंक ही उत्तर होगा।

↑

$$
\begin{array}{r}
3\;7\;\dot{9} \\
8\;5\;4 \\
+7\;6\;\dot{7} \\
4\;2\;6 \\
\hline
6 \\
\hline
\end{array}
$$

(स) यहां योग के लिये नीचे से ऊपर योग करने की विधि प्रयोग की गयी है। वैसे ही सही और तीव्र योग नीचे की ओर भी की जा सकती है।

चरण 2 : अब बीच वाली पंक्ति लेंगे। दहाई स्थान को जोड़ने से पहले इकाई स्थान प्रथम पंक्ति में लगे शुद्धिकरण बिन्दुओं को गिनेंगे। (यहां 2 है) इन बिन्दुओं को जोड़ कर अगली पंक्ति के सबसे नीचे वाले अंक में जोड़ देंगे। 2 + 2 = 4 अब आगे जोड़ेंगे 4 + 6 = 10, यहां शुद्धिकरण की आवश्यकता है। शुद्धिकरण का बिन्दु 6 के ऊपर लगा देंगे। दहाई का अंक छोड़ देंगे। इकाई का अंक आगे जोड़ेंगे 0 + 5, शुद्धिकरण नहीं होगा अब 5 + 7 = 12, अन्तिम अंक 7 पर शुद्धिकरण बिन्दु लगायेंगे एवं इकाई अंक 2 उत्तर होगा।

$$
\begin{array}{r}
3\;\dot{7}\;\dot{9} \\
8\;5\;4 \\
+7\;\dot{6}\;\dot{7} \\
4\;2\;6 \\
\hline
2\;6 \\
\hline
\end{array}
$$

चरण 3 : तीसरी पंक्ति में जाने से पहले एक बार फिर दूसरी पंक्ति (दहाई स्थान) के सभी बिन्दुओं को गिनकर जोड़ेंगे। (यहां 2 है)।

(अ) शुद्धिकरण बिन्दुओं का योग अगली पंक्ति के नीचे वाले अंक में जोड़ेंगे 2+4=6, 6+7=13; अंक 10 से बड़ा है अत: शुद्धिकरण बिन्दु 7 पर लगायेंगे। दहाई का अंक (1) छोड़ देंगे एवं (3) इकाई के अंक को आगे जोड़ेंगे।

(ब) 3+8=11, फिर अंक 8 पर शुद्धिकरण बिन्दु लगेगा दहाई अंक छोड़ कर इकाई का अंक (1) आगे जोड़ेंगे, 1+3=4 यह उत्तर नीचे लिखेंगे।

(स) शुद्धिकरण में लगाये गये बिन्दुओं को जोड़कर हजार स्थान पर हासिल के रूप में प्रयोग करते हैं।

$$\begin{array}{r} 3\ \dot{7}\ \dot{9} \\ \dot{8}\ \dot{5}\ 4 \\ +\dot{7}\ \dot{6}\ \dot{7} \\ 4\ 2\ 6 \\ \hline 2\ 4\ 2\ 6 \\ \hline \end{array}$$

इस प्रकार उत्तर है 2426

विवेचना :

1. विस्तार पूर्वक एवं सरल करने के हेतु यहां स्थान अधिक लगा है लेकिन अभ्यास करने पर जानेंगे कि यह विधि मानसिक रूप से कितनी शीघ्र एवं सरलता से होती है।

2. प्रत्येक चरण में केवल एक अंक है, (अर्थात् केवल इकाई) इसलिये यह आसान एवं शीघ्रता से हो जाता है तथा त्रुटियों की संभावना भी कम होती है।

3. जोड़ की यह विधि लम्बे जोड़ में भी उतनी ही सरलता एवं शीघ्रता से की जा सकती है।

अब अन्य उदाहरण देखेंगे—

3·3 उदाहरण 2 :

```
  78924
  27272
 +99999
  72672
 ------
     67
 ------
```

यहां ऊपर से नीचे की ओर जोड़ करेंगे।

चरण 1 : 4+2=6, 6+9=15 (शुद्ध:), 2+5=7, अंक 7 पहली पंक्ति के नीचे उत्तर लिख देंगे।

चरण 2 : 1+2=3, चूँकि शुद्धिकरण का एक ही बिन्दु प्रथम पंक्ति में लगा है, 3+7=10 (शुद्ध:), 0+9=9, 9+7=16 (शुद्ध:), 6 दूसरी पंक्ति के नीचे लिख देंगे।

चरण 3 : 9+2=11 (शुद्ध:), 1+2=3, 3+9=12 (शुद्ध:) 2+6=8.

चरण 4 : 8+2=10 (शुद्ध:), 0+7=7, 7+9=16 'शुद्ध:' 6+2=8.

चरण 5 : 2+7=9, 9+2=11 (शुद्ध:), 1+9=10 (शुद्ध:) 0+7=7.

चरण 6 : अन्तिम पंक्ति में 2 शुद्धिकरण बिन्दु लगे अतः अंक 2 को उत्तर के अन्तिम अंक 7 के पहले लिख देंगे।

$$
\begin{array}{r}
\downarrow \quad 7\ \dot{8}\ \dot{9}\ 2\ 4 \\
\dot{2}\ 7\ 2\ \dot{7}\ 2 \\
+\dot{9}\ \dot{9}\ \dot{9}\ 9\ \dot{9} \\
7\ 2\ 6\ \dot{7}\ 2 \\
\hline
2\ 7\ 8\ 8\ 6\ 7 \text{ उत्तर} \\
\hline
\end{array}
$$

3·4 उदाहरण 3 :

$$
\begin{array}{r}
\downarrow \quad 2\,9\,7\,9\,6 \\
6\,5\,7\,2\,8 \\
+2\,3\,9\,9\,9 \\
5\,4\,3\,2\,1 \\
\hline
\\
\hline
\end{array}
$$

चरण 1 : 6+8=14; 4+9=13. 3+1=4 (2 शुद्धिकरण बिन्दु)।

चरण 2 : 9+2=11; 1+2=3, 3+9=12; 2+2 =(4) (दो शुद्धिकरण बिन्दु)।

चरण 3 : 2+7=9, 7+9=16; 6+9=15; 5+3 =(8) (2 शुद्धिकरण बिन्दु)।

चरण 4 : 9+2=11; 1+5=6, 6+3=9, 9+4 =(13); (2 शुद्धिकरण बिन्दु)।

चरण 5 : 2+2=4, 6+4=10; 0+2=2, 5+2 =(7) (1 शुद्धिकरण बिन्दु)।

```
  29796
  65728
+23999
  54321
———————
 173844  उत्तर
———————
```

अभ्यास :

प्रश्न 1. आवश्यक शुद्धिकरण करते हुये निम्न प्रश्नों को हल करें—

```
  9878        98989       989898
  3113        93189       110079
+8009      +  4039      +897597
———          ————         ——————

  9898989       98989898
  7658972       10756891
+9753468      +94372615
———————        ————————

         98989898
         60895007
       +32783914
        ————————
```

प्रश्न 2 : जांच करें क्या लगे हुये शुद्धिकरण बिन्दु सही है ? जांच के बाद प्रश्नों को हल करें। तीर के निशान की दिशा में जोड़ करें।

```
    77        89       998        9897
    68        89       102        9469
↓ +57       +98      +983         8358
  ——         ——        269       +7456
                      ———         6589
                                  ————
```

प्रश्न 3. नीचे दिये गये प्रश्नों को कहाँ शुद्धिकरण की आवश्यकता है, एवं योग करें।

98	9898	989	639
86	9037	329	87
+37	638	761	+308
——	+7008	+104	61
	9833	67	———
	———	———	

प्रश्न 4. जांच करें क्या उत्तर सही हैं।

8 3	3 0 9	8 9 3	3 4 1
$\dot{2}$ $\dot{9}$	4 4 $\dot{7}$	3 8	8 3 6 9
———	$\dot{6}$ 2 $\dot{9}$	$\dot{4}$ 7	$\dot{7}$ $\dot{3}$ $\dot{9}$
1 1 2	———	$\dot{5}$ 1 $\dot{8}$	———
	1 3 7 5	———	9 5 3 6
		1 4 8 6	

प्रश्न 5, जहां शुद्धिकरण बिन्दु गलत लगा है वहां वृत बनायें एवं योग पूरी करें।

3 7 2 0 9	2 5 7 8 6	3 4 0 9 8
$\dot{0}$ 8 $\dot{4}$ 7 7	7 2 3	$\dot{6}$ 1 7 $\dot{9}$
————	$\dot{9}$ 7 $\dot{3}$ $\dot{6}$ $\dot{3}$	$\dot{3}$ 6 $\dot{8}$ 1
	————	9 4 3 0 2
		————

प्रश्न 6. जोड़ की वैदिक प्रणाली की कार्यक्षमता पर अपने विचार व्यक्त करें।

अध्याय–4

जोड़ एवं घटा के लिए वैदिक जाँच
(VEDIC CHECK FOR ADDITION AND SUBTRACTION)

4·1 प्रस्तावना :

पिछले दो अध्यायों में हम देख चुके हैं कि जोड़ एवं घटा की क्रियायें, आसान वैदिक सूत्र शुद्धः के प्रयोग से शीघ्रता से की जा सकती हैं। वैदिक विधियों के अद्वितीय नगीनों में से एक आसान विधि सभी प्रकार की अंकगणितीय क्रियायें जैसे—जोड़, घटा, गुणन एव भाग आदि की शुद्धता की जाँच है। ये और भी दिलचस्प बात है कि ये विधियाँ विस्तृत भी की जा सकती है एवं उतनी ही आसानी क्षमता, दक्षता तथा शुद्धता से गुणन-खण्ड, आंशिक भिन्नों तथा बीजगणितीय क्रियाओं पर भी प्रयोग की जा सकती हैं। यहां पर, हम केवल जोड़ एवं घटा की शुद्धता की जाँच की विधि (विभिन्न चरणों में) देखेंगे।

4·2 घटा की जांच : पाँचवे अध्याय में हमने शुद्धः सूत्र का प्रयोग करके घटा की वैदिक विधि को सीखा। हमने देखा कि वैदिक विधि में अंक को निचले स्तर पर ले जाने की बिल्कुल आवश्यकता नहीं है, जैसा कि वर्तमान प्रणाली में आवश्यक है। हम जानते हैं कि अंक को निचले स्तर पर ले जाने का विचार छोटे बच्चों के लिये सीखना बहुत कठिन है।

घटा की शुद्धता की जाँच करने में प्रयुक्त आसान क्रियाओं में हम तीन संख्याओं, मूल संख्या, घटाये जाने वाली संख्या एवं

परिणाम को एक अंकीय संख्या में बदलते हैं। ये हम संख्या के विभिन्न अंकों को आपस में जोड़ कर प्राप्त करते हैं। जैसे ही ये योग हमें द्विअंकीय संख्या देता है, वैसे ही हम दोनों अंकों को आपस में जोड़ कर उन्हें एक अंकीय संख्या में बदल देते हैं। फिर हम, घटायी गयी संख्या को जोड़कर प्राप्त एक अंकीय सख्या में परिणाम के तुल्य एक अंकीय संख्या को, जोड़ते हैं। एक बार फिर यदि ये योग द्विअंकीय संख्या देता है, हम दोनों अंकों को आपस में जोड़कर अंततः एक अंकीय योग प्राप्त करते हैं, इस प्रकार प्राप्त ये एक अंकीय संख्या, मूल संख्या से प्राप्त एक अंकीय संख्या के बराबर होना चाहिये।

निम्नलिखित उदाहरण में विधि को विभिन्न चरणों में दर्शाया है—

4·2·1 उदाहरण : माना हमें 57 में से 32 घटाना है। हम घटा के सामने एक वर्ग बनाते हैं और फिर मध्य बिन्दुओ को मिलाकर चार वर्गों में बाँट देते हैं।

$$\begin{array}{r} 57 \\ -32 \\ \hline 25 \\ \hline \end{array}$$

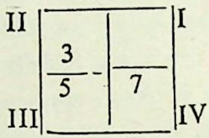
II	3		I
III	5	7	IV

चरण 1 : परिणाम 25, एक अंकीय संख्या में बदले जाने पर $5+2=7$ देता है। ये निचले दाहिने वर्ग (IV) में लिखा जाता है।

चरण 2 : उसी प्रकार घटायी गयी संख्या 32 एक अंकीय संख्या के रूप में $3+2=5$ देती है और इसे निचले बायें वर्ग (III) में लिखा जाता है।

चरण 3 : इसी प्रकार मूल संख्या 57, एक अंकीय संख्या के रूप में 5+7=12; 1+2=3, 3 देती है।

चूंकि 5+7 का योग द्विअंकीय संख्या 12 देता है, हम अंततः एक अंकीय संख्या प्राप्त करने के लिए अंकों को एक बार फिर जोड़ते हैं। ये ऊपरी बांये वर्ग (II) में लिखा जाता है।



चरण 4 : अब हम परिणाम की (चरण 1) तुल्य एक अंकीय संख्या को, घटाई गयी संख्या की (चरण 2) एक अंकीय संख्या में जोड़ते हैं। इस उदाहरण में 5+7=12, 1+2=3, अन्तिम एक अंकीय संख्या है। इस प्रकार प्राप्त एक अंकीय संख्या वर्ग (I) में लिखी जाती है। चूंकि ये संख्या, मूल संख्या के लिए प्राप्त एक अंकीय संख्या (वर्ग II) में लिखी हुई के बराबर है, इसलिये हम तर्कपूर्वक कह सकते हैं कि हमारा घटाना एकदम सही है।

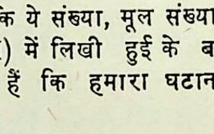
विवेचना :

हमने पाया कि घटाने की क्रिया की शुद्धता की जाँच की विधि, अत्यन्त सुगम, साधारण एवं सीधी है। चूंकि ये विधि कुछ और उदाहरणों के अध्ययन के लिये लाभदायक हैं अतः इस आसान विधि से हमें अवश्य परिचित होना चाहिये।

4·3 अन्य उदाहरण :

उदाहरण 1 : माना हम शुद्धः, सूत्र का प्रयोग करके 3752 में से 1871 घटाते हैं।

$$\begin{array}{r} 3\,7\,5\,2 \\ -\,1\,8\,7\,1 \\ \hline 1\,8\,8\,1 \\ \hline \end{array}$$



हम गणना के सामने एक वर्ग बनाते हैं और इसे चार वर्गों में विभक्त करते हैं। कृपया ध्यान दें कि हम वर्गों का अंकन उसी क्रम में करते हैं जैसे—निर्देशांक ज्यामिति में , II, III, IV की दिशा में करते हैं।

चरण 1 : परिणाम 1881, जब एक अंकीय संख्या में बदला जाता है तो (1+8=9, 9+8=17, 1+7=8, 8+1 =9) देता है जिसे हम निचले दाहिने वर्ग (IV) में लिखते हैं। पुन: हम देखते हैं कि जैसे ही योग द्विअंकीय संख्या को प्राप्त होता है, (9+8=17), हम एक अंकीय संख्या प्राप्त करने के लिये दोनों अंकों को जोड़ते हैं, जो कि संख्या के शेष अंकों को जोड़ने के लिये प्रयुक्त होती है।

चरण 2 : इसी प्रकार, घटाई गयी संख्या (1871), एक अंकीय संख्या के रूप में 1+8=9, 9+7=16, 1+6=7, 7+1=8 देती है। अन्तिम एक अंकीय संख्या को निचले बांये वर्ग (III) में लिखा जाता है।

II	8		I
III	8	9	IV

चरण 3 : मूल संख्या, 3752 के तुल्य एक अंकीय संख्या, 3+7=10, 1+0=1; 1+5=6; 6+2=8 प्राप्त की गयी। यह ऊपरी बांये वर्ग (II) में लिखा जाता है।

चरण 4 : अन्त में हम चरण 1 वर्ग (IV) में, प्राप्त उत्तर के तुल्य एक अंकीय संख्या को चरण 2 (वर्ग III) में प्राप्त, घटाई गयी संख्या के तुल्य एक अंकीय संख्या में जोड़ते हैं।

इस उदाहरण में $8+9=17$, $1+7=8$ ये वर्ग (I) में लिखा जाता है । हम वर्ग I एवं वर्ग II की संख्याओं की तुलना करते हैं। चूंकि वे दोनों बराबर हैं, अत: हम तर्क सहित कह सकते हैं कि हमारी घटा सही है ।

II			I
	8	8	
	8	9	
III			IV

उदाहरण 2 :

$$\begin{array}{r} 10000000 \\ -\ 8764321 \\ \hline 1235679 \\ \hline \end{array}$$

II			I
III			IV

हम उसी प्रकार से वर्ग बनाते हैं ।

चरण 1 : परिणाम के लिये एक अंकीय संख्या $1+2=3$; $3+3=6$; $6+5=11$, $1+1=2$; $2+6=8$; $8+7=15$, $1+5=6$; $6+9=15$, $1+5=6$; इस तरह से प्राप्त की जाती है और उसे वर्ग IV में लिखा जाता है ।

चरण 2 : इसी प्रकार से, घटायी गयी संख्या के तुल्य एक अंकीय संख्या $8+7=15$, $1+5=6$; $6+6=12$, $1+2=3$; $3+4=7$; $7+3=10$, $1+0=1$; $1+2=3$; $3+1=4$ है । ये निचले बांये वर्ग III में लिखा जाता है ।

II			I
	1	1	
	4	6	
III			IV

चरण 3 : मूल संख्या के लिये एक अंकीय संख्या इस तरह प्राप्त की जाती है 1+0+0=1 और ऊपरी बांये वर्ग में लिखा जाता है।

चरण 4 : वर्ग I के अंक को प्राप्त करने के लिये, हम वर्ग III एवं वर्ग IV के अंकों को जोड़ते हैं। इस प्रकार हम 6+4=10, 1+0=1 प्राप्त करते हैं। पुनः हम देखते हैं कि वर्ग I एवं वर्ग II के अंक बराबर हैं अतः जाँच ठीक है।

टिप्पणी :

1. थोड़े अभ्यास के साथ, समस्त विधि केवल कुछ ही क्षणों में मन में ही की जा सकती है।

2. यह प्रेक्षण दिलचस्प है कि एक अंकीय संख्या में परिवर्तित करते समय नौ का अंक जोड़े गये अंक पर कोई प्रभाव नहीं डालता। इसलिये हम आसानी से संख्या में नौ का अंक छोड़ सकते हैं और कार्य आसान कर सकते हैं।

3. इसी प्रकार शून्य के साथ करते हैं।

4. यदि संख्या में सभी अंक नौ के हों तो सिवाय एक अंक के सभी अंकों को छोड़ सकते हैं।

5. थोड़े अभ्यास के बाद हम बिना वर्ग बनाये ही जाँच कर सकते हैं। फिर भी जब तक हमें पद्धति पर पूर्ण विश्वास एवं सम्पूर्ण विचार स्पष्ट न हो, हमें ऐसा नहीं करना चाहिये।

4.4 योग की जांच : घटाने की शुद्धता की जाँच के लिये अद्वितीय, आसान एवं अत्यन्त तीव्र वैदिक विधि को सीखने के बाद, हम देख सकते हैं कि लम्बे योग की शुद्धता की जाँच के लिए उसी विधि को बढ़ा सकते हैं। इन जाँचों में प्रयुक्त सूत्र, के

काफी अधिक उपयोग हैं, उन्हें कुछ समय बाद प्रस्तुत करेंगे। फिर भी हम योग की शुद्धता की जाँच की आसान पद विधि सीख सकते हैं।

4.4.1 विधि : वैदिक विधि में हम प्रत्येक संख्या को उसकी तुल्य एक अंकीय संख्या में परिवर्तित करते हैं। और एक अंकीय रूप में परिवर्तित इन संख्याओं का योग, योगफल की तुल्य एक अंकीय संख्या के बराबर होगा।

पद विधि निम्नलिखित उदाहरण की सहायता से समझाई गयी है—

4.4.2 उदाहरण : माना हम दो संख्या 26789 एवं 35274 को जोड़ते हैं।

$$\begin{array}{r} 2\;6\;7\;8\;9 \\ +3\;5\;2\;7\;4 \\ \hline 6\;2\;0\;6\;3 \\ \hline \end{array}$$

चरण 1 : हम तुल्य एक अंकीय संख्या प्राप्त करने के लिये पहली संख्या के अंकों को जोड़ते हैं। यहाँ पर $2+6=8$; $8+7=15$; $1+5=6$; $6+8=14$; $1+4=5$; $5+9=14$; $1+4=5$. इस प्रकार प्राप्त एक अंकीय संख्या पहली संख्या के सामने लिखी जाती है।

चरण 2 : इसी प्रकार हम दूसरी संख्या के लिए एक अंकीय संख्या प्राप्त करते हैं। इस उदाहरण में $3+5=8$; $8+2=10$; $1+0=1$; $1+7=8$; $8+4=12$; $1+2=3$. पुनः इसे दूसरी संख्या के सामने लिखा जाता है।

चरण 3 : इसी प्रकार योगफल के लिए एक अंकीय संख्या प्राप्त करते हैं और इसे उत्तर के सामने लिखते हैं। यहाँ 6+2=8; 8+0=8; 8+6=14; 1+4=5; 5+3=8.

चरण 4 : अन्त में हम पद 1 एवं 2 में प्राप्त एक अंकीय संख्याओं को जोड़ते हैं। प्राप्त होने वाला अंक पिछले पद में प्राप्त अंक के बराबर होना चाहिए। यदि ऐसा है तो योगफल की शुद्धता की पुष्टि होती है। इस उदाहरण में 5+3=8 जो कि चरण 3 में प्राप्त संख्या के बराबर है।

```
   2 6 7 8 9        5
 + 3 5 2 7 4        3
 -----------        -
   6 2 0 6 3        8  = 8
 -----------        -
```

अतः हमारा जोड़ ठीक है।

4.4.3 उदाहरण :

```
   3 7 9
   8 5 4
   7 6 7
 + 4 2 6
 -------
 2 4 2 6
 -------
```

चरण 1 : योग के लिए हम वैदिक सूत्र, शुद्धः का प्रयोग कर सकते हैं और योगफल को वर्तमान विधि की अपेक्षा काफी तेज लिखते हैं चूंकि वैदिक विधि में योग केवल एक अंकीय संख्या का होता है और त्रुटियों की सम्भावना न्यूनतम हो जाती हैं। ये अंकगणितीय योग के लिये लाभदायक है। हम पहली

संख्या को एक अंकीय संख्या में बदलने के लिये उसके सभी अंकों को जोड़ते हैं। यहाँ $3+7=10$; $1+0=1$; $1+9=10$; $1+0=1$. पहले संख्या के तुल्य एक अंकीय संख्या 1 है। यह एक अंकीय संख्या पहले अंक के सामने लिखी जाती है।

चरण 2 : इसी प्रकार से, दूसरी संख्या के लिये उसकी तुल्य एक अंकीय संख्या प्राप्त की एवं उसे दूसरी संख्या के सामने लिखा। यहाँ $8+5=13$; $1+3=4$; $4+4=8$; इच्छित संख्या 8 है।

चरण 3 : यही विधि सभी संख्याओं के लिये दोहरायी जाती है। यहाँ $7+6=13$; $1+3=4$; $4+7=11$; $1+1=2$; तीसरी संख्या का तुल्य एक अंक है। चौथी संख्या की तुल्य एक अंकीय संख्या $4+2=6$; $6+6=12$; $1+2=3$. प्राप्त की गयी।

3 7 9	1	
8 5 4	8	
7 6 7	2	
4 2 6	3	
2 4 2 6	5	=5 अतः हमारा जोड़ ठीक है।

चरण 4 : अब हम योगफल की एक अंकीय संख्या पाने के लिये उसके अंकों को जोड़ते हैं जो कि उत्तर के सामने लिखा जाता है। इस उदाहरण में $2+4=6$; $6+2=8$; $8+6=14$; $1+4=5$.

चरण 5 : अन्त में, हम सभी संख्याओं की तुल्य एक अंकीय संख्या को जोड़ते हैं। यदि प्राप्त संख्या, पिछले पद में प्राप्त

योगफल की तुल्य एक अंकीय संख्या के बराबर है तो हमारा जोड़ सही है। यहाँ $1+8=9$; $9+2=11$; $1+1=2$; $2+3=5$. चूंकि यह पिछले पद में प्राप्त अंक के बराबर है, अत: हमारे उत्तर की शुद्धता की पुष्टि हुई।

4.5 विवेचना :

1. वर्तमान तरीके में, विधि को दोहराना ही योग की शुद्धता की जाँच का एकमात्र रास्ता है। इसमें उतना ही समय एवं प्रयास लगता है।

2. तुल्य एक अकीय संख्या में बदलने वाली योग की जाँच की वैदिक विधि निश्चित रूप से तीव्र एवं सरल है।

3. ये हमें स्वतन्त्र जाँच प्रदान करता है।

4. ये बात दिलचस्प है कि योग के जाँच की वैदिक विधि, यद्यपि वर्तमान विधि से आसान एवं तीव्र है, फिर भी अंक-गणितीय एवं बीजगणितीय गुणा तथा भाग, गुणनखण्ड, आंशिक भिन्नों आदि की शुद्धता की जाँच की अत्यन्त तेज विधियों की अपेक्षा थोड़ी लम्बी है, जो कि हम आगे के अध्यायों व खण्डों में पढ़ेंगे।

5. अन्त में ये लिखते हुये हमें रोमांच हो रहा है कि विभिन्न जाँचों में केवल एक वैदिक सूत्र ही कार्यशील है। इसके बारे में विस्तृत चर्चा पुष्प-2 में की जायेगी।

अभ्यास :

प्रश्न 1. निम्नलिखित घटा के प्रश्नों को हल करो एवं वैदिक विधि से जाँच करो।

(i) $\begin{array}{r} 1586 \\ -0967 \\ \hline \end{array}$

(ii) $\begin{array}{r} 11111 \\ -\ 8699 \\ \hline \end{array}$

(iii)
```
  1 0 9 2 3 7
−   9 2 3 4 1
─────────────
```

(iv)
```
  7 2 5 6 7 8 9
− 2 9 6 7 9 8 2
───────────────
```

प्रश्न 2. क्या नीचे किये गये जोड़ के उत्तर सही हैं ? वैदिक विधि से जाँच करें।

(i)
```
  5 8 9 6
  2 5 8 7
  6 2 5 8
─────────
1 8 6 4 3
─────────
```

(ii)
```
  1 2 5 6 7 8
  9 2 3 4 5 6
  9 0 8 7 5 4
  0 3 0 5 6 7
─────────────
1 8 8 7 6 4 5
─────────────
```

(iii)
```
  5 4 5 6
  9 2 3 4
  9 3 6 7
  8 6 7 5
  9 5 1 6
─────────
4 2 2 6 8
─────────
```

(iv)
```
  9 9 9 9 8 5 6 9
  8 2 0 1 6 7 8 6
  7 8 5 6 8 6 7 5
  9 8 0 5 6 1 2 3
─────────────────
3 5 8 6 4 0 1 5 3
─────────────────
```

प्रश्न 3. वैदिक विधि से जोड़ के अध्याय–3 (जोड़) के अभ्यास के प्रश्नों की 'जाँच' करें।

प्रश्न 4. वैदिक विधि से अध्याय–2 (घटा) के अभ्यास के प्रश्नों की 'जाँच' करें।

अध्याय-5

गुणा
(MULTIPLICATION)

5.1 परिचय :

यह एक रोचक तथ्य है कि गुणा करने का एक साधारण सूत्र है जो कि सभी गुणा करने के प्रश्नों में प्रयोग किया जा सकता है। यह सूत्र बहुत सरल है। यद्यपि कुछ असाधारण प्रश्नों को हल करने के लिये विशेष वैदिक सूत्र हैं जिनके द्वारा सरलता व आसानी से जल्दी उत्तर प्राप्त किया जा सकता है। इसको 'निखिलम् विधि' के नाम से भी जाना जाता है।

द्वितीय सूत्र : 'निखिलं नवतश्चरमं दशात:' इस सूत्र का भाषीय अर्थ है--प्रत्येक अंक को 9 से और अन्तिम को 10 से विभिन्न श्रेणी के प्रश्नों के लिये इस विधि को चरण क्रम से निम्न प्रकार समझाया गया है।

5.2 प्रथम श्रेणी :

उदाहरण :

चरण 1 : हम एक सरल उदाहरण लेंगे जिसमें 13 को 11 से गुणा करना है। इन अंकों को हम वैदिक रीति से आधार पद्धति में लिखेंगे—

$$13+3$$
$$11+1$$

हम देखते हैं कि लिये गये आधार 10 में केवल एक शून्य है। धनात्मक चिन्ह यह बताता है कि दोनों अंक आधार से अधिक हैं।

चरण 2 : प्राप्त हल में दो भाग हैं एक ऊर्ध्वाधर रेखा के द्वारा इन्हें दो भागों में बाटेंगे।

$$\begin{array}{r} 13+3 \\ 11+1 \\ \hline / \end{array}$$

चरण 3 : हम ऊर्ध्वाधर रूप से अधिक अंकों को (जो कि धनात्मक या ऋणात्मक चिन्ह के बाद लिखे हैं) आपस में गुणा करेंगे। प्राप्त संख्या हमें उत्तर का दाहिना भाग देती है। यहाँ पर यह $3 \times 1 = 3$

$$\begin{array}{r} 13+3 \\ 11+1 \\ \hline /\ 3 \end{array}$$

चरण 4 (क) : उत्तर का बांया भाग, बांये ओर की किसी भी संख्या को दांये ओर की दूसरी संख्या की आधार से न्यूनता या अधिकता के साथ जोड़कर निकाला जा सकता है।

1. प्रथम संख्या 13 में, दूसरे अंक की न्यूनता 1 जोड़ेंगे तो हमें $13+1=14$ प्राप्त होगा।

2. दूसरी संख्या 11 में, प्रथम अंक की न्यूनता अर्थात् 3 जोड़ेंगे तो $11+3=14$ प्राप्त होगा।

टिप्पणी—यहाँ पर दोनों स्थितियों में समान उत्तर प्राप्त होता है।

$$\begin{array}{r} 13+3 \\ 11+1 \\ \hline 14\ /\ 3 \end{array}$$

(ख) पिछली विधि के अतिरिक्त अन्य विधियों द्वारा भी उत्तर का बांया भाग प्राप्त किया जा सकता है।

विधि 1 : दी गई संख्याओं के योग से यदि हम आधार संख्या को घटा दें तो $24-10=14$.

विधि 2 : दोनों संख्याओं की आधार से प्राप्त न्यूनता या अधिकता अंक को आपस में जोड़ दें फिर इसमें आधार संख्या जोड़ दें। $3+1=4$

आधार + कुल संख्या $= 10+4=14$

उपरोक्त दोनों विधियों से समान उत्तर प्राप्त होता है।

चरण 5 : इस प्रकार $11 \times 13 = 143$

$$\begin{array}{c} 13+3 \\ 11+1 \\ \hline 14 / 3 \end{array}$$

वैदिक विधि की यह विशेषता है कि इसमें कई विधियों से प्रश्न को हल करके समान उत्तर प्राप्त किया जा सकता है, विद्यार्थी इस प्रकार अपने उत्तर की जाँच भी कर सकता है।

अन्य उदाहरण :

$$\begin{array}{c} 14+4 \\ 12+2 \\ \hline 16 / 8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c} 11+1 \\ 15+5 \\ \hline 16 / 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c} 19+9 \\ 11+1 \\ \hline 20 / 9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 12+2 \\ 13+3 \\ \hline 15 / 6 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c} 17+7 \\ 11+1 \\ \hline 18 / 7 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c} 13+3 \\ 13+3 \\ \hline 16 / 9 \\ \hline \end{array}$$

यहाँ पर एक बात ध्यान देने योग्य है कि, अंकों की आधार से न्यूनता या अधिकता से प्राप्त उत्तर में केवल एक अंक है और आधार में भी केवल एक शून्य है, इस प्रकार दाहिनी ओर प्राप्त संख्या के द्वारा किसी भी प्रकार की परेशानी नहीं है।

5.3 द्वितीय श्रेणी : ऐसे गुणा प्रश्नों में जिनमें न्यूनताओं के गुणा करने पर प्राप्त संख्या में अंक, लिये गए आधार में शून्य से अधिक हो, इनमें अतिरिक्त अंक को बांये ओर हासिल रूप में लिखकर उत्तर में जोड़ देते हैं (चरण 4)।

उदाहरण :

(i) 14×13

$14+4$

$13+3$

$17/{}_{1}2 = 17+1/2 = 18/2 = 182$

(ii) 16×12

$16+6$

$12+2$

$18/{}_{1}2 = 18+1/2 = 19/2 = 192$

(iii) 18×13

$18+8$

$13+3$

$21/{}_{2}4 = 21+2/4 = 23/4 = 234$

ऐसे उदाहरण लेंगे जिनमें बड़े अंकों वाली संख्या का आधार लेना पड़े।

(iv) 106 × 105

106 + 6

105 + 5

———

111 / 30 = 11130

उपरोक्त उदाहरण में दांये अंकों का गुणनफल 30 आता है जिसमें दो अंक हैं, हमने यहाँ पर आधार 100 लिया है जिसमें दो शून्य हैं, इस प्रकार 30, दांये ओर लिखा जायेगा।

(v) 109 + 9	108 + 8	102 + 2
111 + 11	109 + 9	144 + 44
120 / 99	117 / 72	146 / 88

(vi) 111 × 112

111 + 11

112 + 12

———

$123 /_{1}32 = 123 + 1/32 = 12432$

दांये ओर का उत्तर मानसिक रूप से गुणा करके निकाल लेंगे, जैसा वैदिक गणित में करते हैं।

11 + 1

12 + 2

———

13 / 2

(vii) 113 × 114	दांये ओर
113 + 13	13 + 3
11! + 14	14 + 4
/	$17 /_{1}2 = 182$

$$\begin{array}{l} 113+13 \\ 114+14 \\ \hline 127/{}_{1}82 = 128/82 = 12882 \end{array}$$

(viii)
$$\begin{array}{l} 117\times118 \\ 117\times17 \\ 118\times18 \\ \hline 135/{}_{3}06 = 135+3/06=13806 \end{array}$$

दांये ओर हल करने पर

$$\begin{array}{l} 17+7 \\ 18+8 \\ \hline 25/{}_{5}6 = 30/6=306 \end{array}$$

5.4 तृतीय श्रेणी : उपरोक्त उदाहरणों में यह बताया गया है कि दांये ओर अंकों के गुणा करने के बाद प्राप्त संख्या में अधिक अंक होने पर उन्हें बांये ओर लिखकर जोड़ देते हैं, यदि इसका विपरीत हो, कि बांये ओर प्राप्त संख्या में अंक कम हो गये आधार के शून्य से, तो हम स्वयं उस अंक के पहले शून्य बढ़ा लेते हैं।

दांये ओर $3\times2=6$

$$\begin{array}{l} 102+2 \\ 103+3 \\ \hline \end{array}$$

यहाँ पर हमने आधार 100 लिया है जिसमें **2** शून्य हैं, इसलिये 6 के आगे हम स्वयं शून्य बढ़ा लेंगे। इस प्रकार हम 06 लिखेंगे।

उदाहरण—

102 × 103

102 + 02
103 + 03
———————
105 / 06

107 × 101

107 + 07
101 + 01
———————
108 / 07

104 × 102

104 + 04
102 + 02
———————
106 / 08

1010 × 1005

1010 + 10
1005 + 05
———————
1015 / 050

10010 × 10101

10010 + 10
10101 + 101
———————
10111 / 1010
———————

1099 × 1001

1099 + 99
1001 + 01
———————
1100 / 099
———————

जब आधार 100 है :

103 + 3
2312 + 2212
———————
2315 / $_{66}36$ = 2315 + 66/36 = 2381/36 = 238136

103 × 13

जब आधार 10

$$\begin{array}{l} 103+93 \\ 13\ \ +3 \\ \hline 106 / {}_{27}9 \end{array} = 106+27/9 = 133/9 = 1339$$

5.5 चतुर्थ श्रेणी : उपरोक्त वर्णित तीनों स्थितियों में दो गुणा करने वाली संख्याओं में से कम से कम एक तो आधार से थोड़ा ही अधिक थी, लेकिन ऐसे प्रश्नों में जिनमें संख्यायें लिये गये आधार से जरा सा कम हों, उन्हें उसी प्रकार हल कर सकते हैं। इसमें क्रास जोड़ करने के स्थान पर घटाते हैं, दांये ओर के अंक अधिक या कम होने पर वही नियम रहते हैं।

उदाहरण : 9×6 $\quad 6 \times 5$

$$\begin{array}{l} 9-1 \\ 6-4 \\ \hline 5/4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 6-4 \\ 5-5 \\ \hline 1/{}_{2}0 \end{array} = 1+2/0 = 3/0 = 30$$

$$\begin{array}{l} 8\times 6 \\ 8-2 \\ 6-4 \\ \hline 4/8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 91\times 93 \\ 91-9 \\ 93-7 \\ \hline 84/63 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 89\times 97 \\ 89-11 \\ 97-3 \\ \hline 86/33 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 64\times 98 \\ 64-36 \\ 98-2 \\ \hline 62/72 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 79\times 97 \\ 79-21 \\ 97-3 \\ \hline 76/63 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 988\times 998 \\ 988-12 \\ 998-2 \\ \hline 986/024 \end{array}$$

985×995	99976×99998
$985 - 15$	$99976 - 24$
$995 - 5$	$99998 - 2$
$980/075$	$99974 / 00048$

टिप्पणी : इन सभी उदाहरणों में जबकि संख्या आधार से छोटी हो तो उसका आधार से विचलन निखिलं सूत्र से सीधा व बड़ी सरलता से लिखा जा सकता है जैसे—988 का आधार 1000 से विचलन निखिलं सूत्र द्वारा $9-9=0$, $9-8=1$ और $10-8=2$, इस प्रकार हमें 012 प्राप्त हुआ। इसी प्रकार अगले उदाहरण में 99976 का विचलन निखिलं सूत्र से $9-9=0$, $9-9=0$, $9-7=2$, $10-6=4$ इस प्रकार हमें 00024 प्राप्त हुआ।

5.6 पंचम श्रेणी : यदि गुणांक संख्याओं में एक संख्या आधार से कम हो व दूसरी संख्या अधिक, तब न्यूनता, धनात्मक एवं ऋणात्मक होगी। ऐसी स्थिति में भी नियम में कोई परिवर्तन नहीं होगा जैसे—

उदाहरण :

$$\begin{array}{r} 13+3 \\ 9-1 \\ \hline 12 / \overline{3} \end{array} = 11/10-3 = 11/7 = 117$$

यहाँ पर धनात्मक एवं ऋणात्मक संख्याओं का गुणनफल ऋणात्मक है।

$$\begin{array}{r} 106+6 \\ 96-4 \\ \hline \end{array}$$

$102/\overline{24} = 101/100-24 = 101/76 = 10176$

$$\begin{array}{r} 108+8 \\ 91-9 \\ \hline \end{array}$$

$99/\overline{72} = 98/100-72 = 9828$

$$\begin{array}{r} 103+3 \\ 97-3 \\ \hline \end{array}$$

$100/\overline{09} = 99/100-09 = 9991$

$$\begin{array}{r} 1021+21 \\ 996-4 \\ \hline \end{array}$$

$1017/\overline{084} = 1016/1000-84 = 1016916$

$$\begin{array}{r} 1012+12 \\ 996-4 \\ \hline \end{array}$$

$1008/\overline{048} = 1007/1000-48 = 1007952$

$$\begin{array}{r} 10012+12 \\ 9997-\ \ 3 \\ \hline \end{array}$$

$10009/00\overline{36} = 10008/10000-0036$
$= 100089964$

टिप्पणी : उत्तर के दांये भाग में एक ऋणात्मक चिन्ह है इसे विनकुलम् भाग कहते हैं। इस भाग को निखिलमं सूत्र के द्वारा हल कर सकते हैं।

अभ्यास :

प्रश्न 1. निम्न गुणा करो।

(i) 12×12	(ii) 14×13
(iii) 17×17	(iv) 108×109
(v) 102×103	(vi) 112×108
(vii) 113×109	(viii) 112×111
(ix) 1002×1009	(x) 1007×1012
(xi) 1110×1004	(xii) 1003×1002
(xiii) 19×17	

प्रश्न 2. निम्न गुणा निखिलं सूत्र द्वारा करें।

(i) 9×7	(ii) 8×7
(iii) 7×6	(iv) 6×5
(v) 91×93	(vi) 92×95
(vii) 87×97	(viii) 86×98
(ix) 58×99	(x) 67×96
(xi) 87×91	(xii) 598×998
(xiii) 99981	(xx) 99998

प्रश्न 3. निम्न संख्याओं को निखिलं सूत्र द्वारा गुणा करो।

(i) 11×9	(ii) 14×6
(iii) 15×6	(iv) 111×98
(v) 102×97	(vi) 125×95
(vii) 1025×997	(viii) 1034×998
(ix) 1002×92	(x) 1003×97
(xi) 100007×9998	(xii) 10008×9992
(xiii) 10002×9993.	

अध्याय–6

अपवर्त्य तथा अपवर्तक

(MULTIPLES & SUB MULTIPLES)

6·1 परिचय :

पिछले अध्याय में हमने जिन उदाहरणों के विषय में पढ़ा, हमने देखा कि उनमें गुण्यक (Multiplicand) और गुणक (Multiplier) लिये गये आधार के काफी निकट थे, अर्थात् आधार व दी गई संख्या का अन्तर बहुत कम था और उस अन्तर को गुणा करना बहुत आसान था, लेकिन जब हमें दो ऐसी संख्याओं का गुणा करना पड़ता है जो कि हमारे द्वारा लिये गये आधार से काफी दूर होती हैं, तब हमें थोड़ी कठिनाई होती है। इस प्रकार की संख्याओं के गुणा करने के लिये एक उपसूत्र 'अनुरूप्येण' का प्रयोग किया जाता है। इस उपसूत्र का अर्थ है 'अनुपात से' अर्थात् जिन प्रश्नों में एक प्रकार का अनुपातिक सम्बन्ध (Rational relationship) है उसमें उस अनुपात का प्रयोग करना चाहिये। इस अनुपात से आवश्यकतानुसार गुणा या भाग करना पड़ेगा।

6·2 उदाहरण 1 : 43×43 गुणा करो—

हम देखते हैं कि उपरोक्त दोनों संख्या आधार 100 से बहुत दूर हैं अर्थात् इनमें 57 जोड़ना पड़ेगा इन्हें आधार के बराबर लाने के लिये या यह भी कह सकते हैं कि इसमें न्यूनता क्रमशः 57, 57 की है। इतनी बड़ी संख्याओं की ऊर्ध्वाधर गुणा करना

कठिन प्रतीत होता है। अतः ऐसी स्थिति में हम 100 को काल्पनिक आधार मानकर और एक ऐसी संख्या जो कि 43 के निकट है उसे (जैसे 50) उपाधार (Sub-Base) लेकर हल निकालते हैं। इस प्रश्न को निम्न विधि द्वारा हल करेंगे।

चरण 1 : आधार = 100

उपआधार = 50

अपवर्तक = $\frac{1}{2}$

क्योंकि $100 \times \frac{1}{2} = 50$

चरण 2 : हम देखते हैं कि दी गई संख्याओं का विचलन लिये गये उप आधार से 7 है। हम वैदिक पद्धति के अनुसार निम्न-लिखित ढंग से लिख सकते हैं।

$$\begin{array}{l} 43-07 \\ 43-07 \end{array}$$

चरण 3 : $07 \times 07 = 49$ (दांया पक्ष)

$$\begin{array}{l} 43-07 \\ 43-07 \\ \hline \quad / \ 49 \end{array}$$

यहाँ पर एक बात ध्यान देने योग्य है कि हमने आधार 100 माना है इसलिये दांये पक्ष में दो अंक लिखे जायेंगे।

चरण 4 : संख्याओं को आड़ा घटाने से हम देखते हैं कि $43-07=36$ (बांये पक्ष में)।

चरण 5 : हम देखते हैं कि अपवर्तक 1/2 है इसलिये हम बांये पक्ष को 1/2 से गुणा करते हैं—

$\frac{1}{2} \times 36 = 18$

जो संख्या आती है वह बांये पक्ष का सही उत्तर है।

$$\begin{array}{r} 43-07 \\ 43-07 \\ \hline 18\,/\,49 \end{array} = 1849$$

6.2.1 दूसरी विधि : हम 50 उप आधार, आधार 10 को 5 से गुणा करके भी प्राप्त कर सकते हैं ।

चरण 1 : आधार — 10

उप आधार — 50

अपवर्तक — 5 $(5 \times 10 = 50)$

चरण 2 : दी गई संख्याओं का उप आधार से विचलन कितना है— $(50 - 43 = -7)$

$$\begin{array}{r} 43-7 \\ 43-7 \\ \hline \end{array}$$

चरण 3 : दांये पक्ष की संख्याओं का गुणनफल निकालेंगे ।

$7 \times 7 = 49$

यहाँ पर हम देखते हैं कि आधार 10 होने के कारण दांये पक्ष में केवल एक ही अंक लिखा जा सकेगा । अतः—

$$\begin{array}{r} 43-7 \\ 43-7 \\ \hline /\,{}_4 9 \end{array}$$

चरण 4 : संख्याओं को आड़ा घटाने से

$43 - 7 = 36$ (बांये पक्ष की संख्या) ।

चरण 5 : यहाँ पर अपवर्तक 5 है तो बांये पक्ष की संख्या को 5 से गुणा करेंगे— $36 \times 5 = 180$.

43 − 7
43 − 7
————
180 / ₄9

चरण 6 : अब दांये पक्ष का प्रथम अंक बांये पक्ष में जोड़ देंगे—
अर्थात् $180 + 4 = 184$.

43 − 7
43 − 7
————
184 / 9 = 1849

टिप्पणी—इस प्रकार दूसरी विधि के द्वारा भी वही उत्तर मिला।

9.2.2 तीसरी विधि : हम 10 को आधार व 40 को उपआधार मानकर भी प्रश्न हल कर सकते हैं, यहाँ पर अपवर्तक 4 होगा। $(4 \times 10 = 40)$.

43 + 3
43 + 3
————
46 / 9

अब बांये पक्ष को 4 से गुणा करेंगे— $46 \times 4 = 184$.

इस प्रकार
43 + 3
43 + 3
————
184 / 9 उत्तर = 1849

इस विधि द्वारा भी वही उत्तर आता है।

नोट : पिछले उदाहरण 'अनुरूप्येण' सूत्र को अच्छी तरह व्यक्त करते हैं, जो उत्तर प्राप्त होता है उसे अपवर्तक द्वारा गुणा करके सही उत्तर मिलता है।

6·3 उदाहरण : 48×48

9·3·1 प्रथम विधि : आधार — 100

उप आधार — 50

अपवर्तक — $\frac{1}{2}$

(क्योंकि $100 \times \frac{1}{2} = 50$).

$$\begin{array}{l} 48 - 02 \\ 48 - 02 \\ \hline 46 \,/\, 04 \end{array} \qquad (48 - 02 = 46).$$

बांया पक्ष = अपवर्तक × 46

$= \frac{1}{2} \times 46 = 23$

इस प्रकार उत्तर $= 2304$

(यहाँ हमने आधार 100 लिया है तो दांये पक्ष में दो अंकों का होना जरूरी है, इसलिये 4 के पहले शून्य लिखा जायेगा)।

6·3·2 द्वितीय विधि : आधार — 10

उप आधार — 5 $(5 \times 10 = 50)$.

$$\begin{array}{l} 48 - 2 \\ 48 - 2 \\ \hline 46 \,/\, 4 \end{array}$$

बांया पक्ष = अपवर्तक × 46

$= 5 \times 46$

$= 230$

उत्तर $= 230/4 \qquad = 2304$

नोट : यहाँ हमने आधार 10 लिया है इसलिये दांये पक्ष में एक अंक है।

6·3·3 तृतीय विधि : आधार — 10

उप आधार — 40

अपवर्तक — 4 (क्योंकि $4 \times 10 = 40$)

$$\begin{array}{r} 48+8 \\ 48+8 \\ \hline 56/_{6}4 \end{array}$$

यहाँ पर हमने आधार 10 लिया है इसलिये दांये पक्ष में केवल एक ही अंक लिखा जायेगा व प्रथम अंक को बांये पक्ष में जोड़ दिया जायेगा, लेकिन जोड़ा तभी जायेगा जब हम अन्तिम चरण पर पहुंचेंगे। इस प्रकार हम यह कह सकते हैं कि बांये पक्ष का उत्तर हम अनुरूप्येण सूत्र का प्रयोग करके ही निकालेंगे।

बांया पक्ष = अपवर्तक $\times$ 56

$= 4 \times 56 = 224$

$$\begin{array}{r} 48+8 \\ 48+8 \\ \hline 224/_{6}4 \end{array} = 230/4 = 2304$$

टिप्पणी : (1) प्रत्येक रीति से "अनुरूप्येण" सूत्र का अर्थ साफ-साफ स्पष्ट होता है।

(2) विभिन्न प्रकार के गुणा के प्रश्न अनुरूपेण सूत्र द्वारा हल किये जा सकते हैं।

(3) अनुरूपेण सूत्र के प्रयोग के अनेक उदाहरण एवं प्रश्न पुष्प-2 में दिये जायेंगे।

अभ्यास :

प्रश्न 1. नीचे दिये गये प्रश्नों को विभिन्न आधार एवं उप-आधार के संयोगों से गुणा करें। हर प्रश्न के सबसे सुचारु आधार या उपाधार को बतायें।

(i) 42×42
(ii) 47×47
(iii) 52×54
(iv) 41×45
(v) 56×58
(vi) 43×44
(vii) 251×255
(viii) 31×47
(ix) 221×212
(x) 23×16
(xi) 13×31
(xii) 4782×4997
(xiii) 524×495
(xiv) 281×594
(xv) 497×39
(xvi) 368×511
(xvii) 512×522
(xviii) 675×498
(xix) 3989×5002
(xx) 72×9989
(xxi) 123×605
(xxii) 102×9867.

प्रश्न 2. उपसूत्र अनुरूपेण की व्याख्या करें।

अध्याय-7

निखिलं उपप्रमेय
(NIKHILAM COROLLARIES)

7·1 परिचय :

पिछले अध्यायों में दिये गये प्रश्नों का हल 'निखिलम्' सूत्र द्वारा निकाला था। इन उदाहरणों में से कुछ का हल एक दूसरे सूत्र द्वारा और भी आसानी से निकाला जा सकता है, यह सूत्र है 'ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्'। यह एक ऐसा सूत्र है जो सभी प्रकार के गुणा करने में प्रयोग किया जा सकता है।

निखिलं सूत्र जिसका प्रयोग पिछले अध्यायों में किया गया है उसकी अनेक उपप्रमेय (Corollaries) हैं। ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र का प्रयोग करने से पूर्व हम इन उपप्रमेयों को समझेंगे।

7·2 प्रथम उपप्रमेय :

निखिलं सूत्र का उपप्रमेय सूत्र है 'यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गचं योजयेत्' इसका यह अर्थ है कि जो भी संख्या की आधार से कमी है उसे उतनी ही संख्या से कम करो, तथा उस कमी के वर्ग को ज्ञात करो। यह सूत्र संख्याओं के वर्ग निकालने में बहुत उपयोगी है—

7·2·1 उदाहरण : संख्या की जो आधार से कमी है अर्थात् उसकी न्यूनता (—) चिन्ह के साथ प्रकट की जायेगी।

उदाहरण : 6 का वर्ग ज्ञात करो।

चरण 1 : आधार = 10

न्यूनता = − 4

चरण 2 : 6, 10 से 4 कम है, इसलिये संख्या से 4 और घटाना होता है—

$\therefore 6 - 4 = 2$ (यह उत्तर का बांया पक्ष है)

2 /

चरण 3 : न्यूनता संख्या का वर्ग ही उत्तर का दांया पक्ष है—

$\because 4^2 = 16$

चरण 4 : क्योंकि आधार 10 है इसलिये दांये पक्ष में केवल एक अंक ही लिखेंगे। हमेशा की तरह 1 को बाये पक्ष में जोड़ देंगे—

$2/_16 = 36$

इसी प्रकार—

$7^2 = (7-3)\ /3^2 = 4/9 = 49$

$8^2 = (8-2)\ /2^2 = 6/4 = 64$

$9^2 = (9-1)\ /1^2 = 8/1 = 81$

इस सूत्र 'यावदूनं' का प्रयोग हम बड़ी संख्याओं के वर्ग निकालने में भी कह सकते हैं :

$92^2 = (92-8)/8^2 = 84/64 = 8464$

$94^2 = (94-6)/6^2 = 88/36 = 8836$

$95^2 = (95-5)/5^2 = 90/25 = 9025$

$96^2 = (96-4)/4^2 = 92/16 = 9216$

$97^2 = (97-3)/03^2 = 94/09 = 9409$

$99^2 = (99-1)/01^2 = 98/01 = 9801$

$996^2 = (996-4)/04^2 = 992/016 = 992016$

$993^2 = (993-7)/7^2 = 986/049 = 986049$

$995^2 = (995-5)/5^2 = 990/025 = 990025$

$989^2 = (989-11)/11^2 = 978/121 = 978121$

$987^2 = (987-13)/13^2 = 974/[(13+3)/3^2 = 16/9] = 974169$

$9989^2 = 9989-0011/0011^2 = 9978/0121 = 99780121$

$9993^2 = 9986/0049.$

7.2.2 उदाहरण 2 : यदि संख्या आधार से बड़ी हो तो कमी सकारात्मक अर्थात् चिन्ह + के साथ लिखेंगे—

$13^2 = 13+3/3^2 = 16/9 = 169$

$16^2 = 16+6/6^2 = 22/_36 = 256$

$18^2 = 18+8/8^2 = 26/_64 = 324$

$20^2 = 20+10/10^2 = 30/10^0 = 400$

$104^2 = 104+4/04^2 = 108/16 = 10816$

$107^2 = 107+7/7^2 = 114/49 = 11449$

$112^2 = 112+12/12^2 = 124/_144 = 12544$

$1011^2 = 1011+11/011^2 = 1022/121 = 1022121$

टिप्पणी : इन तरीकों का बीजगणितीय प्रमाण जगतगुरु स्वामी भारती कृष्ण तीरथ जी की पुस्तक 'वैदिक गणित' में दिया गया है।

7·3 द्वितीय उपप्रमेय : द्वितीय उपप्रमेय है 'एकाधिकेनपूर्वेण' यहाँ इसे उपसूत्र के रूप में प्रयोग किया गया है वास्तव में इस सूत्र का प्रयोग प्रथम उपप्रमेय की एक विशेष विधि है। यह सूत्र उन संख्याओं के वर्ग निकालने में प्रयोग किया जाता है जिनका अन्तिम अंक 5 है। इस सूत्र का अर्थ है 'पिछले से एक अधिक द्वारा'। उदाहरण : 35 का वर्ग ज्ञात करो—

यहाँ पर 5 से पहली संख्या है 3 इस सूत्र के अनुसार हम पहली संख्या अर्थात् 3 को, पहले से एक अधिक अर्थात् 3+1=4, से गुणा करते हैं। यह उत्तर का बांया पक्ष है। दांया पक्ष तो ऊर्ध्वाधर 5 का गुणा है।

$$35^2 = 3\times4/5\times5$$
$$= 12/25 = 1225$$

उदाहरण :

$25^2 = 2 \times 3/25 = 6/25 = 625$

$45^2 = 4 \times 5/25 = 20/25 = 2025$

$65^2 = 6 \times 7/25 = 42/25 = 4225$

$85^2 = 8 \times 9/25 = 72/25 = 7225$

$75^2 = 7 \times 8/25 = 56/25 = 5625$

$95^2 = 9 \times 10/25 = 90/25 = 9025$

$115^2 = 11 \times 12/25 = 132/25 = 13225$

$$135^2 = 13 \times 14/25 = \begin{array}{c} 13+3 \\ 14+4 \\ \hline 18 / 2 \end{array} /25 = 18225$$

$$145^2 = 14 \times 15/25 = \begin{array}{c} 14+4 \\ 15+5 \\ \hline 21 / 0 \end{array} /25 = 21025$$

$$155^2 = 15 \times 16/25 = \begin{array}{c} 15+5 \\ 16+6 \\ \hline 24 / 0 \end{array} /25 = 24025$$

$185^2 = 18 \times 19/25 = 34225$

7·4 तृतीय उपप्रमेय : खगोल विज्ञान में हमें कई बार संख्याओं को ऐसी संख्या से गुणा करना पड़ता है जिसके सब अंक 9 होते हैं। इस प्रकार के गुणा में हम उपसूत्र 'एकन्यूनेन पूर्वेण' (Ekanyunena Purvena) का प्रयोग करते हैं।

7·4·1 उदाहरण 1 : $6 \times 9 = ?$

इस सूत्र के अनुसार गुण्यक (Multiplicand) को एक संख्या कम कर देते हैं, इस प्रकार प्राप्त संख्या बांये पक्ष में लिखी जायेगी। दाँया पक्ष प्राप्त करने के लिए, दांये पक्ष की संख्या में से प्राप्त बांये पक्ष की संख्या घटाते हैं।

$$\therefore\ 6 \times 9 = (6-1)/9-(6-1) = 5/4 = 54$$

उदाहरण :

$9 \times 9 = (9-1)/9-(9-1) = 8/1 = 81$

$12 \times 9 = 12-1/9-11 = 11/\bar{2} = 10/10-2 = 108$

$13 \times 99 = 13-1/99-12 = 12/87 = 1287$

$19/99 = 18/99-18 = 18/81 = 1881$

$778 \times 999 = 777/222 = 777222$

$9863 \times 9999 = 9862/0137 = 98620137$

टिप्पणी : दांये पक्ष का उत्तर प्राप्त करने के लिये गुणक में से बांये पक्ष को घटाते समय सभी अंकों को शून्य सहित लिखना चाहिये।

$$(9999 - 9862 = 0137).$$

$3728387 \times 9999999 = 3728386/6271613.$

$12345678912 \times 999999999$

$= 12345678911/87654321088$

$= 1234567891187654321088$

7·4·2 यदि गुण्यक के अंकों की संख्या, गुणक के अंकों की संख्या से कम है तो भी 'एकन्यूनेन पूर्वेण' सूत्र का प्रयोग किया जाता है। परन्तु घटाते समय बांये पक्ष में आवश्यकतानुसार शून्य लिखना आवश्यक है, यदि गुणक के अंक 9 के हो एवं

गुण्यक के अंकों से कम हो तो एकन्यूनेन का सीधा प्रयोग करने में कठिनाई हो सकती है फिर भी अन्य विधि के द्वारा हल निकाला जा सकता है जिसमें विनकुलम का प्रयोग होगा। इसका विस्तृत प्रयोग पुष्प-2 में दिया जायेगा।

7·5 विवेचना :

(1) अभी हमने निखिलं सूत्र के उपप्रमेयों का प्रयोग किया जिन्होंने जादुई गति से कार्य किया।

(2) अन्य अनेकों प्रकार के प्रश्नों में वैदिक विधि के द्वारा जादुई गति की गुणा विधियाँ उपलब्ध हैं।

(3) अन्य उपप्रमेय के विषय अगामी पुष्पों में दिया जायेगा।

अभ्यास :

निम्नलिखित प्रश्न हल करो, प्रत्येक प्रश्न में प्रयुक्त सूत्र व उपसूत्र का भी उल्लेख करो—

प्रश्न 1 :

93×93, 91×91, 98×98,
101×101, 133×133, 111×111,
988×988, 991×991, 993×993,
994×994, 997×997, 999×999,
9997×9997, 9991×9991, 17×17,
19×19, 21×21, 103×103
106×106, 109×109, 113×113
1009×1009.

प्रश्न 2 :

35×35, 55×55, 75×75,
105×105 125×125, 165×165.

प्रश्न 3 :

43×47, 42×68,
81×89, 74×76,
91×99, 103×107,
112×118, 111×119,
104×106, 191×109,
194×106, 692×608,
889×813, 893×807,
897×803.

प्रश्न 4 :

7×9, 8×9,
14×99, 11×9,
17×99, 757×999,
9367×9999, 8437×9999,
9×99, 63×999,
767×99999.

अध्याय-8

विनकुलम्
(VINCULUM)

8·1 परिचय :

सामान्यतया हम संख्याओं के सभी अंकों को धनात्मक रूप में ही व्यक्त करते हैं, परन्तु धनात्मक चिन्ह का लिखा जाना आवश्यक नहीं समझते, जैसे—

संख्या $1534 = 1000 + 500 + 30 + 4$

उपर्युक्त उदाहरण में संख्या के सभी अंक धनात्मक रूप में लिखे गये हैं। स्वाभाविक प्रश्न उठता है कि क्या संख्या के कुछ अंकों को ऋणात्मक रूप में भी लिखा जा सकता है ? यदि हाँ, तो इससे क्या लाभ हो सकते हैं ?

इस अध्याय में हम इन्हीं प्रश्नों पर विस्तार से विचार करेंगे। गणित की साधारण प्रणाली में तो अंकों को ऋणात्मक रूप से लिखने की कोई प्रथा नहीं है परन्तु वैदिक गणित में हम इस प्रणाली का भरपूर प्रयोग करते हुए इसके अनेक लाभ प्राप्त करते हैं। अतः पहले प्रश्न का उत्तर 'हाँ' ही है। वैदिक गणित में संख्याओं के अंकों को ऋणात्मक रूप में लिखने को 'विन-कुलम्' कहते हैं। इस भाँति किसी भी संख्या को अनेक रूपों में लिखा जा सकता है परन्तु वह संख्या उन अनेक रूपों में अपने वास्तविक स्वरूप को कतई नहीं गंवाती। इस प्रकार व्यक्त की हुई संख्या को गणित की अनेक प्रक्रियाओं में सरलता से प्रयुक्त

करते हुए शीघ्रता से उत्तर प्राप्त किया जा सकता है। यद्यपि किसी भी संख्या को आसानी से विनकुलम् रूप में व्यक्त किया जा सकता है, परन्तु हम सब के लिये यह एक नई विधि होने से, आरम्भ में अभ्यास करने में कठिनाई का अनुभव अवश्य हो सकता है। वर्तमान अध्याय को इसी उद्देश्य से लिखा जा रहा है कि उक्त कठिनाई आसानी से हल की जा सके क्योंकि वैदिक गणित के लिए विनकुलम् का ज्ञान अत्यावश्यक है व यह गणना के कार्य को सरल करने में अत्यन्त उपयोगी है।

8·2 सिद्धांत : हम ऊपर व्यक्त की हुई संख्या को ही लें। इस संख्या को हम अनेकानेक रूपों में व्यक्त कर सकते हैं, जैसे—

(1) $1534 = 2000 - 500 + 30 + 4$

(2) $1534 = 1000 + 600 - 70 + 4$

(3) $1534 = 1000 + 500 + 40 - 6$

(4) $1534 = 2000 - 400 - 60 - 6$ आदि।

उपर्युक्त समीकरणों में दांई ओर व्यक्त किये गये ऋणात्मक अंकों को क्रमशः निम्नलिखित विधि से व्यक्त किया जा सकता है (धनात्मक अंक भी साथ में दर्शाये गये हैं)—

$2\bar{5}34$, $16\bar{7}4$, $154\bar{6}$, $2\bar{4}\bar{6}\bar{6}$

उपर्युक्त सभी रूप एक ही संख्या, यानी 1534 के हैं तथा सभी गणितीय प्रक्रियाओं में इनका मान सदैव 1534 ही रहेगा। विनकुलम् में व्यक्त किसी भी संख्या के रूप को सामान्य संख्या में सदैव परिवर्तित किया जा सकता है।

इस प्रकार हमने सीखा कि किसी भी संख्या को विनकुलम् द्वारा अनेक रूपों में व्यक्त किया जा सकता है। परन्तु गणितीय प्रक्रियाओं में विनकुलम् का वही रूप अधिक प्रयुक्त होता है जिसमें संख्या के उन्हीं अंकों को परिवर्तित किया गया हो जिनका मान पाँच से अधिक हो। सामान्यतया वो संख्यायें जिनके सभी अंक पाँच अथवा पाँच से कम हों तो उन्हें विनकुलम् के रूपों में लिखा जाना लाभप्रद न होगा। अतः उपर्युक्त उदाहरण की संख्या, 1534 को परिवर्तित करना, गणितीय प्रक्रियाओं की सरलता की दृष्टि से लाभप्रद नहीं है। कोई अन्य संख्या जैसे— 1691 को विनकुलम् द्वारा इस प्रकार परिवर्तित करना अधिक लाभप्रद होगा—

$$2\ \bar{3}\ \bar{1}\ 1$$

यहाँ पर सभी वह अंक जो कि पाँच से अधिक हैं, छोटे कर दिये गये हैं। संख्या के इसी रूप को देखते हुए वैदिक गणित में आमतौर से यह कहा जाता है कि 5×5 के पहाड़े से अधिक कंठस्थ करने की कोई आवश्यकता नहीं है।

8·3 प्रक्रिया : संख्या को विनकुलम् रूप में परिवर्तित करना एवं आवश्यकता पडने पर सामान्य रूप में लाये जाने की प्रक्रिया अत्यन्त आसान है—

8·3·1 प्रकार 1 : यदि संख्या के किसी भी एक अंक का विनकुलम् ज्ञात करना है तो उस अंक को 10 से घटाकर जो अंक मिलता है उसके ऊपर ऋणात्मक चिन्ह लगा देते हैं। तथा

विनकुलम् अंक के बांये स्थित अंक के मान में एक की वृद्धि कर देते हैं (यदि बांये कोई अंक न हो तो शून्य मानते हुए उसमें एक की वृद्धि की जाती है)।

उदाहरणार्थ : 9 का विनकुलम् $\bar{1}$ होगा तथा इसके बांये शून्य हैं अतः—

$$9 = 1\bar{1} = 10 - 1 = 9$$

इसी प्रकार :

$$16 = 2\bar{4} = 20 - 4 = 16$$

$$29 = 3\bar{1} = 30 - 1 = 29$$

$$46 = 5\bar{4} = 50 - 4 = 46$$

8.3.2 प्रकार 2 : यदि हमें क्रम वार एक से अधिक अंकों को परिवर्तित करना है तो सबसे दांये ओर वाले अंक को 10 से घटा कर आये उत्तर के ऊपर ऋणात्मक चिन्ह लगायेंगे। शेष अन्य अंकों को क्रमवार 9 से घटाते हुये आने-वाले अंकों के ऊपर ऋणात्मक चिन्ह लगायेंगे। अन्त में क्रम में आने वाले सबसे बांये अंक से पूर्व अंक के मान को एक से बढ़ाकर लिखेंगे।

उदाहरणार्थ : संख्या 166 में दांई ओर से दो अंक 5 से बड़े हैं जिन्हें परिवर्तित करना है। इकाई में आये 6 को 10 में से घटाकर $\bar{4}$ लिखेंगे, दहाई में आये 6 को 9 में से घटाकर $\bar{3}$ लिखेंगे तथा बांई ओर के अंक 1 में एक की वृद्धि करके 2 लिखेंगे। अतः $166 = 2\bar{3}\bar{4}$

इसी प्रकार :

$$79 = 1\,\bar{2}\,\bar{1}$$

$$3789 = 4\,\bar{2}\,\bar{1}\,\bar{1}$$

$$286921 = 3\bar{1}\bar{3}\bar{1}21$$
$$353782 = 354\bar{2}\bar{2}2$$
$$56 = 6\bar{4} = 1\bar{4}\bar{4}$$
$$1458 = 146\bar{2} = 15\bar{4}\bar{2}$$

नोट : अन्तिम दो उदाहरणों में हम देखते हैं कि जब भी बांई ओर का अंक 5 हो तो उसे भी विनकुलम् द्वारा परिवर्तित कर लेना चाहिये अन्यथा 5 में एक की वृद्धि करने से मान 6 हो जाता है जो कि 5 से बड़ा है।

8·4 सामान्य रूप : किसी भी संख्या के विनकुलम् रूप को सामान्य रूप में लाने के लिये उपर्युक्त विधि को विपरीत करना होता है। यानी सिर्फ एक ऋणात्मक अंक को परिवर्तित करने के लिये उसे 10 में घटाकर धनात्मक रूप में लिख लेंगे तथा बांई ओर के अंक के मान को 1 कम करके लिखेंगे। यदि एक से अधिक ऋणात्मक अंक क्रमवार हों तो सबसे दांई ओर वाले अंक को 10 से घटायेंगे तथा शेष अंकों को 9 से घटायेंगे और सबसे बांई ओर वाले अंक के मान को एक कम करके लिखेंगे। निम्न उदाहरणों से यह प्रक्रिया समझ में आ सकेगी—

$$1\bar{6} = 04 = 10-6$$
$$2\bar{3}\bar{5} = 165 = 200-30-5$$
$$1\bar{4}32\bar{1}6 = 063196$$
$$3\bar{3}\bar{4}\bar{2} = 2658$$
$$3\bar{3}4\bar{4} = 2736$$
$$20\bar{3}\bar{4}0\bar{1}\bar{2}1 = 19659881$$

नोट : अन्तिम उदाहरण में ऋणात्मक अंकों के दो समूहों के बीच शून्य अंक है। शून्य एक ऐसा अंक है जिसमें ऋणात्मक एवं धनात्मक चिन्ह का कोई महत्व नहीं होता। अतः इस उदाहरण में इसे ऋणात्मक मान लिया गया है। समूह के बांये वाला अंक भी शून्य है, अतः इसे भी ऋणात्मक मानते हुये समूह में शामिल कर लिया गया है। ऐसा करने से सामान्य संख्या एक ही प्रक्रिया में प्राप्त हो जाती है।

8·5 ऋणात्मक संख्या : अन्त में ऋणात्मक संख्याओं के बारे में भी विनकुलम् का प्रयोग बताना आवश्यक है, जैसे—

$$-6 = \bar{6} = \bar{1}4 = -1\bar{4} = -10 + 4$$

$$0\bar{1}2\bar{3} = \bar{1}917 = -1\bar{9}\bar{1}\bar{7}$$

अतः यह स्पष्ट हुआ कि धनात्मक संख्याओं को पूर्णतया ऋणात्मक रूप में नहीं लिखा जा सकता तथा ऋणात्मक संख्याओं को पूर्णतया धनात्मक रूप में नहीं लिखा जा सकता।

जहाँ तक संख्याओं को विनकुलम् रूप में व्यक्त करने से लाभ का प्रश्न है, यहाँ इतना ही कहना काफी होगा कि वैदिक गणित की अनेक प्रक्रियाओं जैसे, योग, घटाना, गुणा एवं भाग इत्यादि में इसका भरपूर प्रयोग होता है तथा अन्य अध्याय, पुष्प-2 में इसके प्रयोग विस्तार से समझाये जायेंगे। यहाँ यह भी बताना आवश्यक है कि यद्यपि विनकुलम् का प्रयोग प्राचीन भारत में होता आया है, इसे आधुनिक कम्प्यूटर में भी प्रयुक्त किया जाता है।

अभ्यास :

प्रश्न 1. नीचे लिखी संख्याओं को विनकुलम् विधि से लिखें।

(i) 298 (ii) 63

(iii) 971 (iv) 1618

(v) 298706 (vi) 191816

(vii) 48990291 (viii) 90836281

(ix) 99910892 (x) 90912546832

संकेत : (निखिलं सूत्र के प्रयोग से सहायता ली जा सकती है)।

प्रश्न 2. नीचे विनकुलम् विधि से लिखी गयी संख्याओं को साधारण रूप में लिखें।

(i) $2\bar{7}1$ (ii) $7\bar{1}\bar{2}8$ (iii) $3\bar{5}\bar{1}\bar{3}$

(iv) $1\bar{2}\bar{3}1\bar{1}\bar{1}1$ (v) $2\bar{7}2\bar{1}6\bar{5}3$

(vi) $3\bar{8}\bar{9}\bar{6}0\bar{1}\bar{3}\bar{4}$ (vii) $5\bar{1}\bar{9}\bar{2}3\bar{3}\bar{2}1$

(viii) $\bar{5}\bar{1}\bar{2}0\bar{1}\bar{2}06$ (ix) $5\bar{4}1\bar{3}2\bar{2}1\bar{1}0$

(x) $5\bar{1}7\bar{2}3\bar{3}5\bar{4}3$

प्रश्न 3. (अ) नई विनकुलम् प्रणाली के विषय में अपने विचार व्यक्त करें।

(ब) आपको यह जानकर कि यह विधि आधुनिक कम्प्यूटर में प्रयोग की जाती है गर्व होना स्वाभाविक है, हाँ, तो यह सीधी वहाँ कैसे पहुँची ?

अध्याय-9

तालिका
(TABLES)

9·1 परिचय : निखिलं नवतश्चरमं दशत: नामक सूत्र की सहायता से हम विभिन्न संख्याओं की गुणा बड़ी सरलता से कर सकते हैं। इस प्रक्रिया में वैदिक आधार पद्धति का उपयोग किया जाता है।

इस सूत्र का अर्थ है 'अन्तिम अंक को 10 से एवं शेष अंकों को 9 से'। इस सूत्र के प्रयोग से हम संख्याओं का आधार से विचलन आसानी से ज्ञात कर सकते हैं।

9·2 उदाहरण 1 :

एक संख्या 9856 है! आधार जो कि 10 का एक गुणक होता है, इस संख्या के लिये 10000 है। निखिलं सूत्र का प्रयोग करने पर अन्तिम अंक को 10 से एवं शेष अंकों को 9 से घटाते हैं।

इसलिये दी गयी संख्या 9856 का विचलन निम्न प्रकार से होगा।

$$9-9=0,\ 9-8=1,\ 9-5=4,\ 10-6=4$$

विचलन 0144 है। अत: 9856−0144

इसी प्रकार 937 को लिखा जा सकता है।

937−063

73 को विचलन सहित लिखने पर 73−27

9·2 उदाहरण 2 : यदि दी गयी संख्या आधार अथवा उपाधार से बड़ी है तो विचलन को धनात्मक चिन्ह के साथ लिखते हैं।

निष्कर्ष : यह विधि ऐसी संख्याओं के गुणन के लिये अत्यन्त सरल है जिनमें संख्या आधार अथवा उपाधार के अत्यन्त निकट हो। क्योंकि इस विधि में केवल विचलनों को गुणा करते हैं और बीजगणितीय योग होता है, इसके विषय में विस्तृत जानकारी हम पहले ही प्राप्त कर चुके हैं। हम एक विशेष बात और देखते हैं कि इस सूत्र के द्वारा हम तालिकायें बड़ी आसानी से बना सकते हैं। वैदिक गणित में हमें 5×5 से आगे की तालिका को याद करने की कोई आवश्यकता नहीं है। इससे आगे की तालिकाओं को बड़ी आसानी से 5×5 की तालिकाओं में विभक्त किया जा सकता है।

इस विचार का यह अर्थ नहीं है कि हम तालिकाओं को याद ही न करें परन्तु उन्हें कंठस्थ करना अनिवार्य नहीं है।

वैदिक गणित रूपी कुंजी से हम न केवल 20 अपितु 100 एवं अधिक सब ही संख्याओं की तालिकायें बना सकते हैं।

9·3 तालिकायें लिखने की विधि :

तालिकायें लिखने के लिये हम दी गयी संख्या में, इकाई, दहाई, सैंकड़े के अंकों के लिये विभिन्न प्रचालक ज्ञात करते हैं। प्रचालक ज्ञात करने के लिये हम दी गयी संख्या, जिसकी तालिका लिखनी है को आधार एवं उपाधार की एक शृंखला के रूप में लिखते हैं। इन आधारों एवं उपाधारों के गुणांक ही विभिन्न प्रचालकों को दर्शाते हैं। इसमें 'निखिलं' सूत्र का प्रयोग करते हैं।

9.3.1 उदाहरण 1 :

माना एक संख्या 19 है। 19 को हम 20−1 भी लिख सकते हैं। अब 20 को भी 2×10 लिखा जा सकता है। तो 19 के लिये श्रृंखला का रूप इस प्रकार होगा।

$$19=2\times(10)-1\times(1)$$

अत: श्रृंखला से स्पष्ट है कि इकाई के एवं दहाई के प्रचालक क्रमश: (−1) एवं (2) है।

एक बार प्रचालक ज्ञात करने के बाद सम्पूर्ण तालिका बड़ी आसानी से किसी भी स्तर तक लिखी जा सकती है। तालिका लिखने की विधि को आगे स्पष्ट किया गया है।

9·3·2 उदाहरण 2 : 89 को निम्न श्रृंखला से लिख सकते हैं।

$$89=90--1=9\times(10)-1\times(1)$$

अत: इकाई व दहाई के प्रचालक क्रमश: −1 एवं 9 हैं, परन्तु वैदिक गणित में 9 की तालिका कंठस्थ होना भी अनिवार्य नहीं है तो हम ऊपरी श्रृंखला को ही एक अन्य रूप में लिखते हैं। यहां पर 100 को आधार लेते हैं।

$$89=90-1=1\times(100)-1\times(10)--1\times(1)$$

हम देखते हैं कि इस श्रृंखला में प्रचालक क्रमश: −1, −1, 1 है। यहां यह बात ध्यान देने योग्य है कि प्रत्येक प्रचालक को उसके चिन्ह के साथ ही लिखा जाना चाहिये।

अब तालिका बनाने के विषय में जानकारी प्राप्त करते हैं।

9·3·3 उदाहरण 3 : 19 की तालिका बनाइये।

चरण 1 : 19 के दोनों अंकों के बीच एक ऊर्ध्वाधर रेखा खींचते हैं।

चरण 2 : अब हम इकाई के अंक में प्रचालक को प्रयोग करते हैं जो कि इस उदाहरण में (−1) है। अतः प्रथम स्तर पर 9, द्वितीय स्तर पर 9−1 =8, तृतीय स्तर पर 8−1=7, चतुर्थ स्तर पर 7−1=6 इत्यादि प्राप्त होता है। अन्त में दसवें स्तर पर 1−1=0 प्राप्त होता है।

इस प्रकार हमें इकाई के स्थान वाले सभी स्तरों के अंक प्राप्त हो जाते हैं।

1	9
	8
	7
	6
	5
	4
	3
	2
	1
	0

चरण 3 : अब हम दहाई के अंक में प्रचालक का प्रयोग करेंगे। इस उदाहरण में जो 2 है। प्रथम स्तर के अंक 1 में प्रत्येक बार 2 जोड़ते चले जाते हैं। अतः प्रथम स्तर पर 1, द्वितीय स्तर पर 1+2=3, तृतीय स्तर पर 3+2=5 चतुर्थ स्तर पर 5+2=7 और दसवें स्तर पर 17+2=19 प्राप्त होता है।

टिप्पणी :

(1) यह आवश्यक नहीं है कि दसवें स्तर तक ही तालिका लिखी जाये। इसी प्रचालक के प्रयोग से आगे किसी भी स्तर तक तालिका को बढ़ाया जा सकता है।

(2) हमें जैसे ही योगफल में 9 से बड़ी संख्या प्राप्त होती है तो हम उसमें बांई ओर के अंक अगले स्थान अर्थात् सैंकड़े के स्थान पर रख कर शेष बचे अंक में ही प्रचालक का प्रयोग करते जाते हैं।

स्तर		
1	1	9
2	3	8
3	5	7
4	7	6
5	9	5
6	11	4
7	13	3
8	15	2
9	17	1
10	19	0

9.4 उदाहरण 4 : 89 की तालिका बनाओ।

$$89 = 1 \times (100) - 1(10) - 1 \times (1)$$

इकाई, दहाई और सैंकड़े के अंक के प्रचालक क्रमश: −1, −1, 1 है।

चरण 1 : दी गयी संख्या 89 को दो रेखाओं से तीन भागों में विभक्त कर लेते हैं।

चरण 2 : इकाई के अंक पर प्रचालक का प्रयोग करने पर हम देखते हैं कि द्वितीय स्तर पर 9−1=8, तृतीय स्तर पर 8−1=7, इसी प्रकार दसवें स्तर पर 0 प्राप्त होता है। यदि हम दसवें स्तर से भी नीचे जाना चाहें, तो 0 के बाद वाले स्तर में दहाई के स्थान पर −1 लिखते हैं और पुन: प्रचालक का उपयोग करते हुए और नीचे स्तरों तक पहुंच जाते हैं। 20 वें स्तर पर पुन: 0 प्राप्त होता है और 21वें स्तर पर दहाई के स्थान पर पुन: −1 लिखते हैं, आदि।

0	8	9
	7	8
	6	7
	5	6
	4	5
	3	4
	2	3
	1	2
	0	1
(−1)	9	0
	(−1)	9
		8
		7

चरण 3 : अब दहाई के अंक में प्रचालक का प्रयोग करते हैं। जिससे प्रथम स्तर पर 8 द्वितीय स्तर पर 8−1=7, नवें स्तर पर 0 प्राप्त होता है। अत: दसवें स्तर पर 9 लिख कर दसवें स्तर में सैंकड़े के स्थान में −1 लिख देते हैं। ग्यारहवें स्तर के लिये 9−1−1=7 प्राप्त होता है। क्योंकि −1 पहले से ही इस स्तर पर उपस्थित है। इसी प्रकार अगले स्तरों के अंकों को प्राप्त कर लेते हैं। बारहवें स्तर पर 7−1=6 प्राप्त होता है।

चरण 4 : अब सैंकड़े के स्थान के प्रचालक +1 को प्रयोग करते हैं । प्रथम स्तर पर 0, द्वितीय स्तर पर 0+1=1, तृतीय स्तर पर 1+1=2 प्राप्त होता है। इसी प्रकार नवें स्तर पर 7+1=8 प्राप्त होता है । दसवें स्तर पर 8+1=9 होगा, परन्तु इस स्थान पर −1 पहले से ही अंकित है जो कि दहाई के प्रचालक को प्रयोग करने पर प्राप्त हुआ था । अत: 10वें स्तर में 9−1=8 होगा । इसी प्रकार 19वें स्तर पर भी 1 कम किया जायेगा ।

स्तर			
1	0	8	9
2	1	7	8
3	2	6	7
4	3	5	6
5	4	4	5
6	5	3	4
7	6	2	3
8	7	1	2
9	8	0	1
10	8	9	0
11	9	7	9
12	10	6	8
.	. .	.	.
.	. .	.	.
19	16	9	1
20	17	8	0
21	18	6	9

टिप्पणी : (1) यद्यपि इन दो उदाहरणों के लिये बहुत अधिक स्थान की आवश्यकता हुई है, परन्तु एक बार इनके स्पष्ट हो जाने पर समस्त क्रियायें मानसिक गणनाओं से की जा सकती है । इसमें समय भी बहुत कम लगेगा ।

(2) यह भी एक ध्यान देने योग्य बात है कि किसी भी स्थिति में प्रचालक ±5 से अधिक नहीं होना चाहिये । अत: हमें केवल 5×5 तक की तालिका ही याद रखनी आवश्यक है ।

(3) प्रचालकों को उनके सम्बन्धित अंक के ऊपर लिख देना चाहिये और मानसिक गणनाओं से प्राप्त अंकों को सीधे ही उचित स्थान पर लिख देना चाहिये ।

9·5 उदाहरण 5 : 22 की तालिका बनाओ।

$$22 = 2 \times 10 + 2 \times 1$$

अतः इकाई एवं दहाई के प्रचालक क्रमश. +2, 2 है।

चरण 1 : 22 को एक रेखा से दो भागों में विभक्त करते हैं।

चरण 2 : इकाई के अंक में प्रचालक लगाने पर प्रथम स्तर में 2 द्वितीय स्तर में 2+2=4, तृतीय स्तर में 4+2=6 प्राप्त होता है। पांचवें स्तर पर 8+2=10 प्राप्त होता है। अतः +1 को दहाई के स्थान के नीचे लिखते हैं। पुनः 0 में प्रचालक लगाते हैं। छठे स्तर में 2 और सातवें स्तर में 4 प्राप्त होता है।

चरण 3 : अब दहाई के अक में प्रचालक लगाते हैं। प्रथम स्तर पर 2, द्वितीय स्तर पर 2+2=4 इसी प्रकार पाँचवें स्तर पर 8+2=10 प्राप्त होगा, परन्तु +1 उपस्थित होने से इसे 10+1=11 रखेंगे। पुनः प्रचालक लगाते हैं। 9वें स्तर पर 19 प्राप्त होगा।

स्तर	
1	2 2
2	4 4
3	6 6
4	8 8
5	1 1 0
6	1 3 2
7	1 5 4
8	1 7 6
9	1 9 8
10	2 2 0
11	2 4 2

अब कुछ उदाहरण केवल प्रचालकों को ज्ञात करने के लिये लेते हैं।

9·6 उदाहरण 6 : $24 = 20 + 4 = 2 \times 10 + 4 \times 1$

प्रचालक 2, 4

उदाहरण 7 : $17 = 10 + 7 = 1 \times 10 + 7 \times 1$

प्रचालक 7, 1 परन्तु 7 प्रचालक लेना उचित नहीं है। अतः $17 = 20 - 3 = 2 \times 10 - 3 \times 1$

प्रचालक 2, −3

उदाहरण 8 : $28 = 30 - 2 = 3 \times 10 - 2 \times 1$

प्रचालक 3, −2

उदाहरण 9 : $34 = 30 + 4 = 3 \times 10 + 4 \times 1$

प्रचालक 3, 4

उदाहरण 10 : $85 = 100 - 10 - 5 = 1 \times 100 - 1 \times 10 - 5 \times 1$ प्रचालक 1, −1, −5

उदाहरण 11 : $97 = 1 \times 100 - 3 \times 1$

प्रचालक 1, 0, −3

उदाहरण 12 : $123 = 100 + 20 + 3$

$= 1 \times 100 + 2 \times (10) + 3 \times 1$

प्रचालक 1, 2, 3

उदाहरण 13 : $379 = 380 - 1 = 400 - 20 - 1$

$= 4 \times 100 - 2 \times 10 - 1 \times 1$

प्रचालक 4, −2, −1

उदाहरण 14 : $429 = 400 + 30 - 1$

$= 4 \times 100 + 3 \times 10 - 1 \times 1$

प्रचालक 4, 3, −1

उदाहरण 15 : $889 = 1000 - 111$

$= 1000 - 100 - 10 - 1$

$= 1 \times 1000 - 1 \times 100 - 1 \times 10 - 1 \times 1$

प्रचालक 1, −1, −1, −1

उदाहरण 16 : $1279 = 1000 + 300 - 20 - 1$

$= 1 \times 1000 + 3 \times 100 - 2 \times 10 - 1 \times 1$

प्रचालक 1, 3, −2, −1

9·7 निष्कर्ष : हमने देखा कि तालिकायें बनाने की वैदिक विधि अत्यन्त सरल है। यह परम आवश्यक है कि कुछ तालिकायें सदैव याद होनी चाहियें, परन्तु वैदिक विधि जो कि एक प्रकार की सरल, सीधी एवं द्रुत गति की कुंजी है, हमें इस कार्य से बचाती है और छात्रों को तालिकाओं से लगने वाले डर को दूर करती है।

यदि छात्र को किसी तालिका की शुद्धि के विषय में कोई संदेह हो तो उसे आसानी से पुनः लिखा जा सकता है।

आगे किसी भी तालिका को किसी भी स्तर तक लिखा जा सकता है। और इन तालिकाओं से गुणन क्रिया को आसानी व कुशलता से कर सकते हैं।

अभ्यास :

प्रश्न 1. निम्नलिखित संख्याओं के पहाड़े 25 तक वैदिक गणित विधि से लिखें।

(i) 8 (ii) 18 (iii) 13 (iv) 32 (v) 102
(vi) 123 (vii) 211 (viii) 92

संकेत : $[92 = 1\times(100) - 1\times(10) + 2\times(1)]$

(x) 998; संकेत : $[998 = 1\times(1000) + 0\times(100) + 0\times(10) - 2\times(1)]$

प्रश्न 2. निम्नलिखित संख्याओं की चालक कुंजियां स्थापित करें व उनकी सहायता से 10 तक के पहाड़े लिखें।

(i) 88 (ii) 279 (iii) 312 (iv) 1121 (v) 1819

प्रश्न 3. इस अध्याय में दिये गये सभी उदाहरणों के पहाड़े 30 तक लिखें।

———

अध्याय–10

गुणन की सामान्य विधि
(THE GENERAL METHOD OF MULTIPLICATION)

10·1 परिचय :

अभी तक हमने वैदिक सूत्रों के प्रयोग से एक विशेष प्रकार के प्रश्नों के हल को सीखा। अब हम गुणन की सरल एवं सामान्य वैदिक विधि को सीखेंगे। यह विधि 'उर्ध्वतिर्यग्भ्याम्' नामक सूत्र पर आधारित है। इस सूत्र का सरल अर्थ है उर्ध्वाधर एवं तिर्यक। यह सूत्र बहुत सुदृढ़ है और गणित की एक बहुत बड़ी प्रश्न शृंखला को हल करने में प्रयुक्त हो सकता है। आगे यह सूक्ष्म सूत्र स्वयं में कई अन्य छोटे-छोटे प्रयोगों को समेटे हुये हैं। प्रो० निकोलस एवं प्रो० विलियम ने एक पुस्तक ही इस सूत्र के प्रयोगों पर लिखी है। (कृपया समाचारों में देखें)। नीचे के खण्डों में इसके प्रयोग को विभिन्न चरणों में दर्शाया गया है।

10·2 उर्ध्व सूत्र के प्रयोग को समझने के लिये यह आवश्यक है कि विभिन्न संख्याओं के कालम के सरलीकरण को समझा जाये।

चरण 1 : यदि एक कॉलम में केवल दो ही अंक हैं तो हम केवल अंकों को उर्ध्वाधर गुणा करके, मान (परिणाम संख्या) को प्राप्त करते हैं।

[उ = ऊपर
न = नीचे
म = मान]

$म = उ_1 \times न_1$ | उ
न

उदाहरण के लिये 2
3
—
$म = 2 \times 3 = 6$

यदि परिणामी संख्या में एक से अधिक अंक आयें तो दहाई वाले अतिरिक्त अंक को अगले उच्च स्थान के नीचे लिखा जाता है।

चरण 2 : यदि सरलीकरण में चार अंकों वाले दो कॉलम हों तो परिणामी संख्या विकर्ण रूप से दो-दो अंकों के गुणनफलों के बीजगणितीय योग से प्राप्त कर सकते हैं।

2 1



उ
न

$म = उ_1 \times न_2 + उ_2 \times न_1$

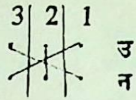
3 2

अत:

उदाहरण के लिये 21
32
—

$म = 1 \times 3 + 2 \times 2 = 7$

चरण 3 : यदि हम 6 अंकों वाले तीन कॉलमों को सरल कर रहे हैं तो परिणामी संख्या दोनों बाहरी कॉलमों (1 एवं 3) के अंकों के वज्र गुणनफलों एवं मध्य कॉलम के अंकों के गुणनफल के बीजगणितीय योगफल से प्राप्त होती हैं।



अत: $म=उ_1 \times न_3 + उ_3 \times न_1 + उ_2 \times न_2$

उदाहरण के लिये 1 2 3

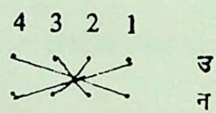
1 2 4

———

$म=3\times1+4+1+2\times2=11$

अतिरिक्त अंक को अगले उच्च स्थान के नीचे रखा जाता है।

चरण 4 : यदि 8 अंकों वाले चार कॉलमों का सरलीकरण करना हो तो पहले व चौथे कॉलमों के अंकों का वज्रगुणन फलों एवं दूसरे व तीसरे कॉलमों के अंकों के भी वज्र गुणनफलों का योगफल ही हमारा अभीष्ट उत्तर होगा।



$म=उ_1\times न_4+उ_4\times न_1+उ_2\times न_3+उ_3\times न_2$

उदाहरण के लिये 1 3 2 4

1 2 3 5

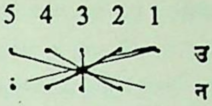
————

————

अत: $म=4\times1+1\times5+2\times2+3\times3=22$

चरण 5 : ऊपर दी गयी विधियों को समझ लेने पर हम 1(अंकों के पाँच कॉलमों को भी सरल कर सकते हैं।

अत: पांच कॉलमों के लिये



$$म = उ_1 \times न_5 + उ_5 \times न_1 + उ_2 \times न_4 + उ_4 \times न_2 + उ_3 \times न_3$$

10·3 विधि : (गुणन के लिये) विभिन्न प्रकार के कॉलमों को सरल करने की विधि जानने के पश्चात् अब हम 'उर्ध्व' सूत्र के प्रयोग की जानकारी प्राप्त करेंगे। विभिन्न चरणों की यह विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट हो जायेगी।

चरण 1 : प्रथम कॉलम को सरल करने के पश्चात् हम सबसे दांये वाले कॉलम के नीचे इसे लिखते हैं। यह हमें उत्तर का सबसे दांया भाग प्रदान करता है।

चरण 2 : प्रथम व द्वितीय कॉलम को सरल करने पर प्राप्त संख्या को इनके नीचे रखते हैं। यह उत्तर का दांयीं ओर से द्वितीय अंक होगा।

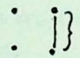
चरण 3 : इसी प्रकार हम क्रम से एक एक कॉलम बढ़ाते जाते हैं और उनको अलग-अलग सरल करते हुए उत्तर के विभिन्न खण्ड प्राप्त कर लेते हैं। इस प्रकार हमें गुणनफल में उतने ही स्तरों तक उत्तर प्राप्त होता है जितने स्तर की कॉलमों की संख्या है।

चरण 4 : सभी कॉलमों का सरलीकरण करने के पश्चात् हम दांयी ओर से एक-एक कॉलम कम करते जाते हैं और इस प्रकार हम गुणनफल के शेष खण्डों का मान प्राप्त कर लेते हैं। जब हम सबसे बांयी ओर वाला कॉलम सरल करते हैं तो हमें गुणनफल का सबसे बांया भाग प्राप्त होता है।

टिप्पणी : इस प्रकार कॉलमों का सरलीकरण करने पर प्राप्त संख्या में यदि एक से अधिक अंक होते हैं तो अतिरिक्त अंक को अगले उच्च स्तर में स्थानान्तरित कर देते हैं।

10·4 उदाहरण 1 : सर्वप्रथम 2 अंकों वाली संख्या का गुणन 2 अंकों वाली संख्या से करते हैं। जैसे— 13×21

$$\begin{array}{r} 2\ 1 \\ \times 1\ 3 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$



चरण 1 : प्रथम कॉलम को सरल करने पर

$म_1 = उ_1 \times न_1 = 1 \times 3 = 3$

$म_1$, गुणनफल का सबसे दांया भाग है अतः इसे प्रथम कॉलम के नीचे रखते हैं।

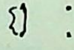
चरण 2 : अब दोनों कॉलमों का सरलीकरण करने पर

$म_2 = उ_1 \times न_2 + उ_2 \times न_1 = 1 \times 1 + 2 \times 3 = 7$

$म_2$ गुणनफल का प्रथम उच्च स्तर है इसे दूसरे कॉलम के नीचे रखते हैं। इस प्रकार हम प्रथम कॉलम की सभी क्रियायें पूरी कर लेते हैं।



:**चरण 3** : हम प्रथम कॉलम को छोड़ देते हैं और शेष द्वितीय कॉलम को सरल करते हैं।



अतः $म_3 = उ_2 \times न_2 = 2 \times 1 = 2$

$म_3$ गुणनफल में द्वितीय उच्च स्तर है (सैंकड़े के मान का) इसे उचित स्थान पर रखते हैं।

```
    2 1
  × 1 3
 ------
 2 / 7 / 3     = 273
```

10.5 उदाहरण 2 : गुणन करो— 26×34

```
   3 4
 × 2 6
 -----
  / 6 / 4
 -----
 2 2
 -----
```

चरण 1 : प्रथम कॉलम को सरल करने पर

$म_1 = उ_1 \times न_1 = 4 \times 6 = 24$

$म_1$, में दो अंक हैं अत: 4 का इकाई के स्थान पर रखते हैं एवं 2 को दहाई के अंक के नीचे रखते हैं।

चरण 2 : द्वितीय कॉलम को सम्मिलित करने पर एवं सरल करने पर $म_2 = उ_1 \times न_2 + उ_2 \times न_1$

$= 4 \times 2 + 3 \times 6 = 26$

$म_2 = 26$ अत: 6 को दहाई के स्थान पर एवं 2 को सैंकड़े के अंक के नीचे रखते हैं।

चरण 3 : अब प्रथम कॉलम को छोड़ देंगे, शेष कॉलम को सरल करते हैं। $म_2 = उ_2 \times न_2 = 3 \times 2 = 6$

$म_2 = 6$, इसे सैंकड़े के स्थान पर रखते हैं।

चरण 4 : अब दोनों पंक्तियों में लिखे गये अंकों को उनके स्थानानुसार जोड़ते हैं।

```
   3 4
 × 2 6
 -----
 6/6/4
 2 2
 -----
 8 8 4
 -----
```

10.6 उदाहरण 3 : गुणन करो— 123×425

```
   4 2 5
 × 1 2 3
 -------
    /6/5
 -------
   1 1
 -------
```

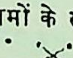


चरण 1 : प्रथम कॉलम को सरल करने पर

$म_1 = उ_1 \times न_1 \quad = 5 \times 3 = 15$

$म_1 = 15$, अत: 5 को इकाई के स्थान पर तथा 1 को दहाई के स्थान के नीचे लिखते हैं।

चरण 2 : अब हम प्रथम कॉलम को अन्य कॉलमों के साथ सरल करते जाते हैं।



$म_2 = उ_1 \times न_2 + उ_2 \times न_1 \quad = 5 \times 2 + 2 \times 3 = 16$

$म_2 = 16$, अत: 6 को दहाई के अंक पर एवं 1 को सैंकड़े के स्थान के नीचे लिखते हैं।

चरण 3 : तीसरे कॉलम को संयुक्त करके सरल करने पर

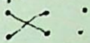


$\text{म}_3 = \text{उ}_1 \times \text{न}_3 + \text{उ}_3 \times \text{न}_1 + \text{उ}_2 \times \text{न}_2$

$= 5 \times 1 + 4 \times 3 + 2 \times 2 = 21$

1 को सैंकड़े के स्थान पर एवं 2 को अगले उच्च स्तर के नीचे लिखते हैं।

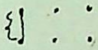
चरण 4 : अब प्रथम कॉलम को छोड़ देते हैं, एवं शेष दो (दूसरे व तीसरे) कॉलमों को सरल करते हैं।



$\text{म}_4 = \text{उ}_2 \times \text{न}_3 + \text{उ}_3 \times \text{न}_2 \quad = 2 \times 1 + 4 \times 2 = 10$

अत: 0 को हजारवें स्थान पर एवं 1 को अगले स्तर के नीचे लिखते हैं।

चरण 5 : अब प्रथम व द्वितीय कॉलमों को छोड़ देते हैं। अब बचे हुये तृतीय कॉलम को सरल करते हैं।



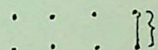
$\text{म}_5 = \text{उ}_3 \times \text{न}_3 \quad = 4 \times 1 = 4$

4 को अगले स्तर में रखते हैं।

```
        4 2 5
        1 2 3
      -------
    4 / 0 1/6 5
    -----------
    1   2 1 1
    -----------
    5 2 2 7 5   उत्तर
    -----------
```

10.7 उदाहरण 4 : गुणन करो— 7824×2638

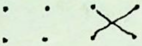
चरण 1 : प्रथम कॉलम को सरल करने पर



$\text{म}_1 = \text{उ}_1 \times \text{न}_1 \quad = 4 \times 8 = 32$

अत: 2 को इकाई के स्थान पर एव अतिरिक्त अंक 3 को दहाई के स्थान के नीचे रखते हैं।

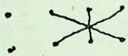
चरण 2 : प्रथम कॉलम को अन्य कॉलमों के साथ लेकर अलग-अलग सरल करते हैं।



$$\text{म}_2 = \text{उ}_1 \times \text{न}_3 + \text{उ}_2 \times \text{न}_1 = 4 \times 3 + 2 \times 8$$
$$= 12 + 16 = 28$$

$\text{म}_2 = 28$ अत: 8 को दहाई के स्थान पर एवं 2 को सैंकड़े के स्थान के नीचे रखते हैं।

चरण 3 : तीसरे कॉलम को सम्मिलित करने पर



$$\text{म}_3 = \text{उ}_1 \times \text{न}_3 + \text{उ}_3 + \text{न}_1 + \text{उ}_2 \times \text{न}_2$$
$$= 4 \times 6 + 8 \times 8 + 2 \times 3$$
$$= 24 + 64 + 6 = 94$$

$\text{म}_3 = 94$, 4 को सैंकड़े के स्थान पर एवं 9 को हजारवें स्थान के नीचे लिखते हैं।

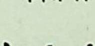
चरण 4 : चौथे कॉलम के मिलाने पर



$$\text{म}_4 = \text{उ}_1 \times \text{न}_4 + \text{उ}_4 \times \text{न}_1 + \text{उ}_3 \times \text{न}_2 + \text{उ}_2 \times \text{न}_3$$
$$= 4 \times 2 + 7 \times 8 + 8 \times 3 + 6 \times 2$$
$$= 8 + 56 + 24 + 12 = 100$$

$\text{म}_4 = 100$, अत: 0 को हजारवें स्थान पर और अतिरिक्त 10 को अगले उच्च स्तर के नीचे लिखते हैं।

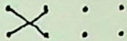
चरण 5 : प्रथम कॉलम के छोड़ देने के बाद शेष कॉलमों को सरल करने पर (दूसरे से लेकर चौथे तक)



$$\text{म}_3 = \text{उ}_2 \times \text{न}_4 + \text{उ}_4 \times \text{न}_2 + \text{उ}_3 \times \text{न}_3$$
$$= 2 \times 2 + 7 \times 3 + 6 \times 8$$
$$= 4 + 21 + 48 = 73$$

म$_2$= 73 तो 3 को दस हजारवें स्थान पर एवं 7 को अगले उच्च स्तर के नीचे लिखते हैं।

चरण 6 : अब द्वितीय कॉलम को भी छोड़ देने पर शेष कॉलमों (3 एवं 4) को सरल करने पर

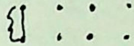


म$_6$ = उ$_3$ × न$_4$ + उ$_4$ × न$_3$ = 16 + 42 = 58

म$_6$ = 58, अत: 8 को एक लाखवें स्थान पर एवं 5 को अगले उच्च स्तर के नीचे लिखते हैं।

चरण 7 : अब अन्तिम कॉलम (चौथे) को सरल करने पर

म$_7$ = उ$_4$ × न$_4$ = 7 × 2 = 14



इसे दस लाखवें स्थान पर लिखते हैं।

```
          7 8 2 4
          2 6 3 8
  ----------------
  14 /8 / 3/0 /4/8/2
  ----------------
   5 7 10 9 2 3
  ----------------
  20 6  3 9 7 1 2   उत्तर
  ----------------
```

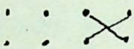
10.8 उदाहरण 5 : गुणन करो— 2427 × 8882

```
     2 4 2 7
     8 8 2 2
  ----------
     8/0/0/4
  ----------
  1 0 8 6 1
  ----------
```

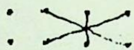
चरण 1 : $म_1 = उ_1 \times न_1$
$= 7 \times 2 = 14$



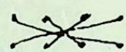
चरण 2 : $म_2 = उ_1 \times न_2 + उ_2 \times न_4$
$= 7 \times 8 + 2 \times 2$
$= 56 + 4 = 60$



चरण 3 : $म_3 = उ_1 \times न_3 + उ_3 \times न_1 + उ_2 \times न_2$
$= 7 \times 8 + 4 \times 2 + 2 \times 8$
$= 56 + 8 + 16 = 80$



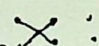
चरण 4 : $म_4 = उ_4 \times न_1 + उ_1 \times न_4 + उ_3 \times न_2 + उ_2 \times न_3$
$= 2 \times 2 + 7 \times 8 + 4 \times 8 + 8 \times 2$
$= 4 + 56 + 32 + 16 = 108$



चरण 5 : अब कॉलम विलुप्तीकरण प्रारम्भ करने पर;
$म_5 = उ_4 \times न_2 + उ_2 \times न_4 + उ_3 \times न_3$
$= 2 \times 8 + 2 \times 8 + 4 \times 8 = 16 + 16 + 32$
$= 64$



चरण 6 : $म_6 = उ_3 \times न_4 + उ_4 \times न_3$
$= 2 \times 8 + 4 \times 8 = 16 + 32 = 48$



```
          2 4 2 7
        × 8 8 8 2
  ------------------
  1 6 / 8 / 4 /8/0/0/4
  ------------------
     4  1   0  8 6 1
        6
  ------------------
  2 1  5   5  6 6 1 4
  ------------------
```

चरण 7 : $म_7 = उ_4 \times न_4 \quad = 2 \times 8 = 16$

निष्कर्ष :

1. उर्ध्व सूत्र के प्रयोग से हम किसी भी दो संख्याओं को गुणा कर सकते हैं। यदि सरलीकरण की क्रिया को अच्छी प्रकार से समझ लिया जाये और अभ्यास किया जाये तो शेष पदों को बड़ी आसानी एवं कुशलता से पूर्ण किया जा सकता है। सम्पूर्ण प्रक्रिया, कुछ ही क्षणों में, सरल मानसिक अंक गणनाओं से की जा सकती है।

2. कुछ अभ्यास के पश्चात्, सरलीकरण से प्राप्त अतिरिक्त अंकों को भी अगले उच्च स्तरों के नीचे लिखने के कार्य से बचा जा सकता है और इसको सीधे ही अगले स्तर के कॉलम के सरलीकरण की संख्या में जोड़ा जा सकता है। इस प्रकार उत्तर केवल एक ही पंक्ति में प्राप्त किया जा सकता है।

3. वैदिक पद्धति में हम उत्तर को बांयी ओर से भी प्रारम्भ कर सकते हैं। इस विधि को, एवं 'विनकुलम्' की विधि को आगामी 'पुष्प-2' नामक पुस्तक में स्पष्ट किया जायेगा।

अभ्यास :

प्रश्न 1. अध्याय 5, 6 और 7 के प्रश्नों को साधारण सूत्र द्वारा हल करो, साथ ही अन्य विधियों का भी प्रयोग करो। तुलना करके सबसे ठीक सूत्र का पता लगाओ जिससे प्रश्न आसानी से हल हो जाये।

प्रश्न 2. 21×63, 27×67, 33×73,
133×179, 141×281, 371×433
1278×9034, 12078×10304,

प्रश्न 3. प्रश्नों के 5 से बड़े अंकों को विनकुलम् में परिवर्तित करके उर्ध्वतिर्यग्भ्याम सूत्र द्वारा गुणा करें।

अध्याय–11

गुणा की जाँच करना
(MULTIPLICATION CHECK)

11.1 परिचय :

वैदिक गणित में गुणनफल को सरलता व जल्दी निकालने की विधि के अतिरिक्त इसमें एक अद्वितीय विशेषता छिपी है। यहाँ पर एक बहुत ही सरल वैदिक विधि है जिसके द्वारा आप गुणनफल की जाँच कर सकते हैं, इस विधि का प्रयोग छोटी कक्षा का विद्यार्थी भी कर सकता है।

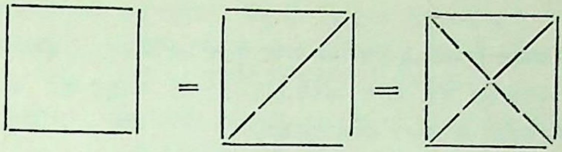
11.2 विधि : आसान, शीघ्र व यथार्थ विधि नीचे दी गई है, इसे एक उदाहरण के सहारे आसानी से समझा जा सकता है।

उदाहरण : 1006×1112

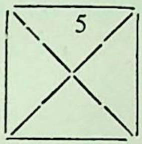
यहाँ पर निखिलं सूत्र प्रयुक्त होता है।

$$\begin{array}{r} 1112 + 112 \\ 1006 + 006 \\ \hline 1118 \,/\, 672 = 1118672 \end{array}$$

चरण 1 : अब गुण्य, गुणक व गुणनफल तीनों को तीन पंक्तियों में सामान्य ढंग से लिखें और इसके सामने एक बड़ा वर्ग बनाओ जिसे दो विकर्णों द्वारा चार भागों में विभाजित करो, प्रत्येक एक त्रिकोण होगा।

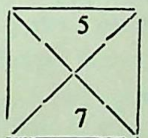


चरण 2 : ऊपर वाली संख्या के सारे अंकों को जोड़कर एक अंक में परिवर्तित करें, यदि उत्तर 9 से अधिक आता है तो पुन: अंकों को जोड़ने की क्रिया को दोहरायेगे, जब तक कि योग एक अंकीय न आये। इस उदाहरण में $1+1+1+2 = 5$ इसे सबसे ऊपर वाले त्रिकोण में लिख देगे।



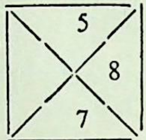
चरण 3 : अब नीचे लिखी संख्या के सारे अंकों को जोड़ेंगे। अर्थात् गुणक के अंकों को यहाँ पर भी 9 से अधिक अंक आने पर ऊपर वाली विधि दोहरायेंगे।

$1+0+0+6=7$, इस संख्या को नीचे आधार पर बने त्रिकोण के भीतर लिख देंगे।



चरण 4 : अब ऊपर वाले त्रिकोण में लिखे अंक को नीचे त्रिकोण में लिखे अंक के साथ गुणा करेंगे—

$5 \times 7 = 35$, यहाँ पर भी हमें केवल एक अंक त्रिकोण के अन्दर लिखना है इसलिये प्राप्त गुणनफल के दोनों अंकों को जोड़कर एक अंक प्राप्त करेंगे। $3 + 5 = 8$, व इसे दांये ओर के त्रिकोण के अन्दर लिख देंगे।

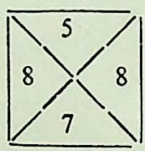


$5 \times 7 = 35$
$3 + 5 = 8$

चरण 5 : अब प्राप्त गुणनफुल 1112×1006 के सभी अंकों को जोड़कर प्राप्त अक को बांये ओर के त्रिकोण में लिखेंगे। यहाँ पर भी अंक के 9 से अधिक होने पर जोड़ना दोहरायेंगे।

```
   1112
   1006
 -------
1118672
```

$1 + 1 + 1 + 8 + 6 + 7 + 2 = 26$
$= 2 + 6 = 8$



जांच : यदि बांये व दांये त्रिकोण में लिखी संख्या बराबर है तो हम कह सकते हैं कि उत्तर सही है।

हम उपरोक्त उदाहरण में देखते हैं कि बांये व दांये त्रिभुज में बराबर संख्या है अर्थात् दोनों में 8 लिखा है। इसके द्वारा गुणनफल के उत्तर की जाँच हो जाती है।

वैदिक गणित के द्वारा गुणा की जांच करना बहुत सरल व बच्चों के खेल के समान है।

अभ्यास :

प्रश्न 1. अभ्यास 10 के प्रश्न 2 के सभी उत्तरों की जाँच, गुणा की वैदिक जाँच प्रणाली द्वारा करें।

प्रश्न 2. क्या नीचे किये गये गुणा के उत्तर सही है। जाँच करें एवं सही या गलत सामने लिखें।

(i) $96 \times 98 = 9408$ (ii) $879 \times 998 = 886082$

(iii) $1016 \times 1006 = 1122096$

(iv) $1033 \times 977 = 1029901$

(v) $87965 \times 99988 = 8796324070$

(vi) $128 \times 672 = 86016$

(vii) $635 \times 502 = 318740$

(viii) $989^2 = 987121$

(ix) $775^2 = 601625$

(x) $1021 \times 2103 = 2147163$

(xi) $582 \times 231 = 134542$

(xii) $87265 \times 32117 = 2802690005$

(xiii) $817 \times 332 = 271244$

(xiv) 1234567809
× 9999999999

1234567808/8765432191

(xv) 999999997
× 999999981

999999978/000000057

अध्याय–12

आवर्त दशमलव
(RECURRING DECIMALS)

12.1 परिचय :

आवर्त संख्याओं का मान जादुई गति से लिखने के लिये 'एकाधिकेन्' सूत्र का प्रयोग किया जाता है। इस सूत्र से आवर्त संख्याओं का मान लिखना न केवल द्रुत गति से होता है अपितु बहुत सरल भी है। यहाँ पर हम केवल विशेष प्रकार के प्रश्नों को हल करेंगे। अन्य प्रश्नों के विषय में और अधिक जानकारी हम अपने अगले संस्करणों में प्रकाशित करेंगे।

12.2 अन्तिम अंक :

(1) भिन्न जिनका अन्तिम अंक 9 हो, इसमें केवल वे ही भिन्न हैं जिनके हर में अन्तिम अंक 9 है, जैसे—

$$\frac{1}{19},\ \frac{1}{29},\ \frac{1}{39},\ \frac{1}{49} \text{ आदि}$$

हम जानते हैं कि प्रत्येक आवर्त दशमलव के लिये हर के अन्तिम अंक एवं आवर्त दशमलव के अन्तिम अंक के गुणा करने पर गुणनफल का अन्तिम अंक 9 प्राप्त होता है। ऊपर लिखे गये सभी उदाहरणों में हर का अन्तिम अंक 9 है। अतः आवर्त दशमलव का अन्तिम अंक 1 होगा। अतः इस गुण के कारण आवर्ती भिन्न का दांयी ओर का अन्तिम अंक 1 है।

(2) भिन्न जिनका अन्तिम अंक कोई भी हो—

उन भिन्नों के लिये जिनका हर कोई अभाज्य संख्या हो, जैसे— 7, 13, 17 आदि, हम तुल्य दशमलव संख्या का अन्तिम अंक आसानी से प्राप्त कर सकते हैं। हम आवर्त दशमलव के उस गुण का योग करते हैं जिसके अनुसार आवर्त दशमलव के अन्तिम अंक एवं हर के अन्तिम अंक के गुणनफल का अन्तिम अंक 9 होता है। अत: उन हरो के लिये, जिनके अन्तिम अंक 7, 3 और 1 हो, दशमलव के बाद अन्तिम अंक क्रमश: 7, 3 और 9 होंगे।

जैसे— $7 \times 7 = 49$, $3 \times 3 = 9$, $1 \times 9 = 9$

प्रचालक : आवर्त दशमलव का मान एक कुंजी रूपी 'प्रचालक' संख्या एकाधिकेन सूत्र के प्रयोग से आसानी से प्राप्त किया जा सकता है।

'एकाधिकेन् पूर्वेण' सूत्र का सरल भावार्थ है 'पहले वाले से एक अधिक'। इस प्रकार 1/49 के लिये प्रचालक संख्या पहले वाली संख्या से 1 अधिक है। अत: प्रचालक $4+1=5$ है। इसी प्रकार 1/39 के लिये प्रचालक $3+1=4$ है। 1/29 के लिये प्रचालक $2+1=3$ है। 1/19 के लिये प्रचालक $1+1=2$ है इत्यादि।

12.3 विधि : 'एकाधिकेन' सूत्र से हमें ज्ञात होता है कि 'पहले वाली संख्या से एक अधिक के द्वारा' इस द्वारा शब्द को गुणन एवं भाग दोनों के लिये प्रयुक्त कर सकते हैं। यह एक अत्यन्त रोचक तथ्य है कि प्रचालक को हम दोनों क्रियाओं से आवर्त दशमलव का मान निकालने में प्रयोग कर सकते हैं। सर्वप्रथम हम प्रचालक को एक नियत व एकसमान गुणक के रूप में प्रयोग करेंगे।

12.3.1 उदाहरण 1 भिन्न 1/39 को लेते हैं ?

जैसा कि पहले ही स्पष्ट किया जा चुका है कि दांयी ओर का अन्तिम अंक 1 होगा । प्रचालक संख्या 3+1=4 है । आगे प्रयोग होने वाले विभिन्न चरणों को नीचे समझाया गया है ।

चरण 1 : दांयी ओर से शुरू करके पहला अंक 1 लिखो और इसके ऊपर एक बिन्दु रखो । यह बिन्दु केवल यह बताता है कि आवर्त समूह का अन्तिम अंक 1 है ।

चरण 2 : इस अंक को प्रचालक से गुणा करते हैं और गुणनफल को पहले वाली संख्या के बांयी ओर लिखते हैं । यदि गुणनफल में 1 से अधिक अंक हैं । तो अतिरिक्त अंक को अगले स्तर के नीचे लिखते हैं । इस उदाहरण में 1×4=4 तो 4 को 1 के बांयी ओर रखा गया है ।

चरण 3 : अब इस पूर्व संख्या (4) को पुनः प्रचालक से गुणा करते हैं । अतः 4×4=16 । 6 को पूर्व संख्या 4 के बांयी ओर लिखते हैं और अतिरिक्त अंक 1 को अगले स्तर के नीचे लिखते हैं, जैसा नीचे दर्शाया गया है ।

$$\begin{matrix} 6 & 4 & \dot{1} \\ & 1 & \end{matrix}$$

चरण 4 : अब पूर्व संख्या 6 को प्रचालक से गुणा करते हैं । 6×4=24 और इसमें हासिल वाला अंक जोड़ देते हैं । 24+1=25 पुनः हम 5 को 6 के बांयी ओर एवं 2 को अगले स्तर के नीचे लिखते हैं ।

$$\begin{matrix} 5 & 6 & 4 & \dot{1} \\ & 2 & 1 & \end{matrix}$$

चरण 5 : अब पूर्व संख्या 5 को प्रचालक से गुणा करते हैं। $5 \times 4 = 20$ और इसमें हासिल वाला अंक जोड़ते हैं। $20 + 2 = 22$ और इस संख्या को पहले की तरह लिखते हैं।

$$\begin{array}{r} 2\ 5\ 6\ 4\ \dot{1} \\ 2\ 2\ 1 \end{array}$$

चरण 6 : पूर्व संख्या 2 को प्रचालक से गुणा करते हैं। अत: $2 \times 4 = 8$ और हासिल वाला अंक जोड़ते हैं। $8 + 2 = 10$ तो हमारी संख्या इस प्रकार हो जाती है।

$$\begin{array}{r} 0\ 2\ 5\ 6\ 4\ \dot{1} \\ 1\ 2\ 2\ \dot{1} \end{array}$$

चरण 7 : 0 को 4 से गुणा करते हैं। $0 \times 4 = 0$ और हासिल वाला अंक जोड़ते हैं। $0 + 1 = 1$ और हम उसी अंक को प्राप्त कर लेते हैं जिससे हमने शुरूआत की थी। अत: हम 0 के ऊपर एक बिन्दु रखते हैं। जो कि आवर्ती समूह को प्रदर्शित करते हैं। दशमलव 0 से पहले रखा जाता है। अत: आवर्त दशमलव समूह इस प्रकार है—

$$\frac{1}{39} = 0 \cdot \dot{0}2564\dot{1}$$

निष्कर्ष : 39 एक अभाज्य संख्या है तो $\frac{1}{39}$ के गुण अन्य आवर्ती संख्याओं से भिन्न हैं।

अत: एक अन्य उदाहरण $\frac{1}{29}$ का लेते हैं।

12.4 उदाहरण 2 : $\frac{1}{29}$ **का मान ज्ञात करो।**

चरण 1 : यहाँ इस भिन्न के हर में अन्तिम अंक 9 है तो तुल्य दशमलव की संख्या में अन्तिम अंक 1 होगा।

चरण 2 : 'एकाधिकेन्' सूत्र से प्रचालक संख्या पहले वाले से एक अधिक होगी। अर्थात् $2 + 1 = 3$ ही प्रचालक है।

चरण 3 : विभिन्न क्रियायें :

(i) दांयी ओर से प्रारम्भ करके प्रथम अंक 1 रखो।

(ii) इस अंक को प्रचालक से गुणा करो और गुणनफल को इस अंक के बांयी ओर रखो—

3 $\dot{1}$

(iii) इस पूर्व संख्या 3 को प्रचालक से गुणा करो और गुणनफल को (3) के बांयी ओर लिखो। अत: $3 \times 3 = 9$

9 3 $\dot{1}$

(iv) पुन: इस पूर्व संख्या (9) को प्रचालक (3) से गुणा करो— $9 \times 3 = 27$, इस गुणनफल में 2 अंक हैं अत: उदाहरण-1 के अनुसार 7 को 9 के बांयी ओर लिखो और 2 को उच्च स्तर के नीचे लिखो।

7 9 3 $\dot{1}$
2

(v) अब 7 को प्रचालक 3 से गुणा करो। $7 \times 3 = 21$ लेकिन वहाँ पहले से ही 2 उपस्थित है जो पिछले गुणनफल का हासिल था। इसे गुणनफल में जोड़ो। $21 + 2 = 23$ पुन: इस संख्या में 2 अंक हैं तो अतिरिक्त अंक 2 को अगले उच्च स्तर के नीचे लिखते हैं।

3 7 9 3 $\dot{1}$
2 2

(vi) इस प्रकार हम और बची हुई संख्याओं को ज्ञात करते जाते हैं जब तक कि हमें प्रारम्भिक अंक नहीं प्राप्त होता है। 1/29 के उदाहरण में हमें 28 अंक प्राप्त होते हैं। परन्तु वैदिक गणित में संख्याओं के गुणों को अत्यन्त भली प्रकार से समझा

गया है और इस 28 अंकों को गुणा के द्वारा प्राप्त करने की कोई आवश्यकता नहीं है। यहाँ एक अन्य सरल विधि भी उपलब्ध है, जिसके अनुसार 28 अकों में से इसके आधे अंक अर्थात् 14 अंक गुणा करके ज्ञात किये जाते हैं और शेष 14 अंक एक विशेष गुण के कारण आसानी से लिखे जा सकते हैं।

जब हम गुणनफल व योग के पश्चात् एक ऐसी संख्या प्राप्त करते हैं जो कि अंश व हर के अन्तर के बराबर है तो शेष अंकों को पहले आधे अंकों से लिख सकते हैं।

अत: हम उसी पूर्व अंक के बाद एक उर्ध्वाधर रेखा खींचते हैं जो यह दर्शाती है कि हम आधा उत्तर प्राप्त कर चुके हैं। हम शेष आधे अंकों को सीधे ही प्राप्त करते हैं इसके लिये उर्ध्वाधर रेखा के पहले वाले अंकों का 9 से पूरक लिखते हैं अर्थात् इन्हें 9 में से घटाकर लिखते हैं। इस उदाहरण में हमें चौदहवें गुणनफल के रूप में 19 प्राप्त होता है तो 9 को चौदहवें अंक के रूप में रखते हैं और अतिरिक्त अंक का अगले उच्च स्तर के नीचे लिखते हैं। अब 9 को प्रचालक 3 से गुणा करते हैं। $9 \times 3 = 27$ और इसमें हासिल वाला अंक 1 जोड़ते हैं $27 + 1 = 28$ यह संख्या $29 - 1 = 28$ है। अत: हम 9 के पहले एक उर्ध्वाधर रेखा खींचते हैं। इस रेखा के बांयी ओर के अंक बड़ी सरलता से उनके अनुरूप अंकों को 9 से घटाकर लिखते हैं। अत: $9 - 1 = 8$, 15 वाँ अंक। $9 - 3 = 6$, सोलहवां अंक। $9 - 9 = 0$, 17वां अंक है इत्यादि और $9 - 9 = 0$ अन्तिम अंक है। अत: 0 के ऊपर एक बिन्दु रखते हैं। और इसके पहले एक दशमलव बिन्दु लिखते हैं।

$$\dot{0}344827586206 8\ 9\ 6\ 5\ 5\ 1\ 7\ 2\ 4\ 1\ 3\ 7\ 9\ 3\ \dot{1}$$
$$2\bar{1}\ 1\ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ 2\ 2$$

12.5 उदाहरण 3 : अब एक ऐसी भिन्न लें जिसमें हर का अन्तिम अंक 9 न हो, जैसे $\frac{1}{7}$

चरण 1 : $\frac{1}{7}$ को $\frac{1}{7} \times \frac{7}{7}$ के रूप में रखते हैं। $\frac{1}{7} = \frac{7}{49}$

चरण 2 : 'एकाधिकेन्' सूत्र से प्रचालक $4+1=5$ है।

चरण 3 : यहाँ हमारा प्रारम्भिक अंक 7 है।

चरण 4 : इस पूर्व संख्या 7 को प्रचालक से गुणा करते हैं और $7 \times 5 = 35$ प्राप्त होता है। 5 का 7 के बायी ओर एव 3 को अगले उच्च स्तर के नीचे लिखते हैं।

चरण 5 : अब 5 को पुन: प्रचालक से गुणा करते हैं और हासिल का अंक 3 जोड़ते हैं इस प्रकार 28 प्राप्त होता है।

चरण 6 : अब 8 को प्रचालक 5 से गुणा करते हैं और 2 जोड़ते हैं। हमें 42 प्राप्त होता है। लेकिन हर और अंश का अन्तर भी 42 है। $(49-7=42)$ अत: हम और आगे गुणा नहीं करते हैं। हम इन तीन अंकों के बाद एक उर्ध्वाधर रेखा लगाते हैं। 2 / 8 5 $\dot{7}$

2 / 3

शेष अंकों को प्राप्त करने के लिये हम उर्ध्वाधर रेखा के बाद के अंकों का 9 से पूरक प्राप्त करते हैं अत: $9-7=2$ चौथा अंक, $9-5=4$ पाँचवा अंक एवं $9-8=1$ छठा अंक है। अत: हमारा उत्तर है। $\frac{1}{7} = \dot{1}\ 4\ 2\ 8\ 5\ \dot{7}$

टिप्पणी : यदि हम अंश को प्रचालक से भाग करते जायें तो भी हमें समान उत्तर ही प्राप्त होगा पर, यह बायी ओर से शुरू होगा। इस प्रकार से करने पर हम भाग को किसी भी स्तर पर रोक सकते हैं।

निष्कर्ष (1) इस अध्याय में हमने 'एकाधिकेन्' सूत्र के एक सरल एवं रोचक प्रयोग को सीखा।

(2) आवर्ती संख्याओं की प्रचलित हमारी वर्तमान लम्बी, दुष्कर एवं समय खोने वाली विधि की अपेक्षा वैदिक गणित की विधि बिल्कुल जादुई गति से कार्य करती है।

(3) यह पद्धति अत्यन्त सरल एवं स्पष्ट है।

(4) इस स्थिति में वैदिक विधि इलेक्ट्रानिक गणकों को बहुत पीछे छोड़ देती है। क्योंकि साधारण गणक 10 अथवा 12 से अधिक अंकों का उत्तर नहीं देते हैं।

(5) किसी भी प्रकार के भाग, गुणनखण्ड, उच्च, घातों वाली समीकरणों के हलों के लिये भी वैदिक विधियां इसी प्रकार तीव्र, स्पष्ट एवं सरल हैं। इनको आगामी संस्करणों में प्रकाशित किया जायेगा।

(6) इन द्रुत गति वाली विधियों के साथ-साथ विभिन्न प्रकार के प्रश्नों के उत्तरों की जाँच के लिये भी अनेक विधियां उपलब्ध हैं।

अभ्यास :

प्रश्न 1. नीचे लिखी संख्याओं का मान दशमलव में ज्ञात करें। (i) $\frac{1}{39}$ (ii) $\frac{1}{49}$ (iii) $\frac{1}{89}$

प्रश्न 2. निम्नलिखित संख्याओं को दशमलव भिन्न में परिवर्तित करो।

(i) 1/19 (ii) 1/69 (iii) 1/23

(iv) 1/17 (iv) 1/199

प्रश्न 3. (1) 1/39 का मान अनन्त दशमलव स्थान तक ज्ञात करें।

(2) 1/29 का मान दशमलव के 84 स्थानों तक ज्ञात करें।

विशेष : वैदिक आवृत दशमलव प्रणाली ही प्रयोग करें।

अध्याय-13

'पुष्पमाला' एक झलक

13·1 परिचय :

वैदिक गणित एक अत्यन्त प्राचीन एवं वृहद् विषय है और सरल अंकगणितीय प्रक्रियाओं के परिचय को ही हम पुष्प 1 में संकलित कर सके हैं। पुष्प–2 में आगे की प्रक्रियाओं एवं सरल बीज गणित के बारे में महत्वपूर्ण जानकारी प्रस्तुत की जायेगी। उच्च गणित में इसके प्रयोग को विभिन्न स्थानों पर पुनः विकसित किया जा सका है (वैदिक गणित समाचार देखें)। यहाँ कुछ झलकियां प्रस्तुत है।

13·2 अंकगणितीय प्रक्रियाएें

13·2·1 संयुक्त गुणन—

8 फुट 11 इंच एवं 11 फुट 7 इंच के आयताकार का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

8 फुट 11 इंच
11 फुट 7 इंच
——————
88 / 177 / 77 =103 / 41
——————

=11 वर्ग गज, 4 वर्ग फुट,
41 वर्ग इंच

प्रयोगिक सूत्र—उर्ध्वतिर्यग्भ्याम।

13·2·2 निम्न भाग करो—

(i) 543921 ÷ 83

प्रयोगिक सूत्र—ध्वजकं एवं उर्ध्वतिर्यग्भ्याम्[1]

```
   3 : 5 4 3 9 2 / 1 /
  8       6 5 4 3
        ——————————
        6 5 5 3 / 22 /
```

भागफल 6553 एवं शेषफल 22 है।

(ii) 1 2 1 35 256 ÷ 9888

प्रयोगिक सूत्र—निखिलम्

```
 9 8 8 8 / 1 2 1 3 / 5 2 5 6
 0 1 1 2     0 1 1   2
               0 2   2 4
                 0   2 2 4
                     0 6 6 1 2
           ————————————————————
           1 2 2 6 / 1 / 2 5 6 8
                         0 1 1 2
           ————————————————————
             1 2 2 7 / 2 6 8 0
```

भागफल 1227 एवं शेषफल 2680 है।

13·2·3 $\frac{17125}{59999}$ को दशमलव के बीसवें स्थान तक निकालें।

प्रयोगिक सूत्र—एकाधिकेन पूर्वेन्

$$\frac{17125}{59999} = 0{\cdot}28542142369039483991$$

13·3· विनकुलम संख्याओं की प्रक्रियायें (भाग–1)

13·3·1 : विनकुलम संख्याओं का योग—

विनकुलम् रूप में संख्याओं का योग सामान्य रूप वाली संख्याओं के समान हैं एक अन्तर यह है कि इसमें प्रत्येक अंक को जोड़ते समय इसके चिन्ह का भी ध्यान रखना होता है। नीचे दिये गये उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जायेगा।

उदाहरण 1 :

$$\begin{array}{r} 2\,\bar{3}\,4\,\bar{2} \\ +4\,\bar{2}\,\bar{1}\,3 \\ \hline \end{array}$$

चरण 1 : इकाई के स्थान में उपस्थित संख्याओं 3 और $\bar{2}$ को जोड़ते हैं। $3+\bar{2}=3-2=1$

चरण 2 : दहाई वाले अंकों $\bar{1}$ एवं 4 को जोड़ते हैं तो

$$4+\bar{1}=4-1=3$$

चरण 3 : सैंकड़े के स्थान के लिये $\bar{2}$ और $\bar{3}$ को जोड़ने पर $\bar{5}$ प्राप्त होता है। $\bar{2}+\bar{3}=-2-3=-5=\bar{5}$

चरण 4 : हजारवें स्थान में 4 व 2 को जोड़ते हैं।

$$4+2=6$$

अतः योगफल निम्न प्रकार से होगा।

$$\begin{array}{r} 2\,\bar{3}\,4\,\bar{2} \\ 4\,\bar{2}\,\bar{1}\,3 \\ \hline 6\,\bar{5}\,3\,1=5531 \\ \hline \end{array}$$

उदाहरण 2 :

$$\begin{array}{r} 3\,\bar{4}\,\bar{4}\,2\,\bar{2} \\ +7\,\bar{5}\,3\,\bar{5}\,4 \\ \hline \end{array}$$

चरण 1 : इकाई के स्थान पर $\bar{2}+4=2$

चरण 2 : दहाई के स्थान पर $\bar{5}+2=-5+2=-3=\bar{3}$

चरण 3 : सैकड़े के स्थान के लिये $3+\bar{4}=3-4=-1=\bar{1}$

चरण 4 : हजारवे स्थान पर $\bar{4}+\bar{5}=\bar{9}$

चरण 5 : अन्तिम स्थान पर $7+3=10$

कुल योग $1\ 0\ \bar{9}\ \bar{1}\ \bar{3}\ 2$ प्राप्त होता है निखिलम सूत्र से विनकुलम् युक्त संख्याओं के समूह का पूरक लिखने पर और उससे पहली वाली संख्या में से 1 घटाने पर निम्न योगफल प्राप्त होता है। $\bar{0}\ \bar{9}\ \bar{1}\ \bar{3}$ का पूरक $=9087$

अन्तिम योगफल 90872

13·3·2 विनकुलम् संख्याओं का घटाना—

विनकुलम संख्याओं का घटाना भी सामान्य संख्याओं के घटाने जैसा ही है। केवल अन्तर यह है कि प्रत्येक अंक को चिन्ह के साथ ही प्रयोग में लाया जाता है। निम्न उदाहरणों से इसे समझने में अवश्य सहायता मिलेगी।

उदाहरण 3 :

1 $4-3=1$

2 $3-4=-1=\bar{1}$

3 $4-\bar{2}=4-(-2)=4+2=6$

4 $\bar{3}-2=-3-2=-5=\bar{5}$

5 $\bar{2}-\bar{3}=-2-(-3)=-2+3=1$

6 $\bar{4}-\bar{2}=-4-(-2)=-4+2=-2=\bar{2}$

विनकुलम् युक्त संख्याओं का घटाना ऊपर दर्शायी गई छः स्थितियों में से किसी एक प्रकार का होगा। घटाने के लिये कहीं भी हासिल की आवश्यकता नहीं होगी। जैसा कि 2, 4, 5 एवं 6 स्थिति में दिखाया गया है।

उदाहरण 4 :

$$\begin{array}{r} 5\ \bar{4}\ 2\ \bar{3}\ 1 \\ -2\ \bar{2}\ 3\ \bar{4}\ 3 \\ \hline 3\ \bar{2}\ \bar{1}\ 1\ \bar{2} \end{array}$$

चरण 1 : इकाइ के स्थान पर $1-3=-2=\bar{2}$

चरण 2 : दहाई के स्थान पर

$$\bar{3}-\bar{4}=-3-(-4)=-3+4=1$$

चरण 3 : सैंकड़े के **स्थान** पर $2-3=-1=\bar{1}$

चरण 4 : हजारवें स्थान पर

$$\bar{4}-\bar{2}=-4-(-2)=-4+2=-2=\bar{2}$$

चरण 5 : अन्तिम स्थान पर $5-2=3$

अतः उत्तर हमें प्राप्त होता है। $3\ \bar{2}\ \bar{1}\ 1\ \bar{2}$ इसको सामान्य बनाने पर 27908 प्राप्त होता है।

उदाहरण 5 :

$$\begin{array}{r} 3\ 7\ 1\ 0\ 8\ 2 \\ -1\ 5\ 6\ 4\ \bar{1}\ \bar{1} \\ \hline 2\ 2\ \bar{5}\ \bar{4}\ 9\ 3 \end{array} = 214693$$

चरण 1 : $2-\bar{1}=2-(-1)=2+1=3$ (इकाई के लिये)

चरण 2 : $8-(\bar{1})=8-(-1)=8+1=9$ (दहाई के लिये)

चरण 3 : $0-4=-4=\bar{4}$ (सैंकड़े के लिये)

चरण 4 : $1-6=-5=\bar{5}$ (हजारवे स्थान के लिये)

चरण 5 : $7-5=2$ (दस हजारवे स्थान पर)

चरण 6 : $3-1=2$ (एक लाखवें स्थान पर)

13·3·3 : निष्कर्ष :

(1) ऊपर दिखाये गये उदाहरणों में विनकुलम् युक्त संख्याओं के योग व घटा को सरल रूप मे प्रदर्शित किया गया है।

(2) यदि घटाया जाने वाला अंक दूसरे अक से बड़ा है तो भी हासिल लेने की कोई आवश्यकता नहीं है जैसा कि प्रचलित विधि में किया जाता है।

(3) ऊपर दर्शाये गये उदाहरणों पर कहीं भी हासिल नहीं लिया गया। तथापि यह पूर्णतः सत्य नहीं है विशेषकर ऐसी स्थिति में जहाँ पर दो अंकों का योगफल 9 से अधिक आता है। तो अतिरिक्त अंक को अगले स्तम्भ में प्रति स्थापित कर देते हैं। इसके लिये सरल शुद्धिकरण विधि का प्रयोग होता है जो कि योग के अध्याय में दर्शाया गया है।

13·3·4 : विनकुलम युक्त संख्याओं का गुणन :

विनकुलम युक्त संख्याओं का गुणन बीजगणित के गुणन के सरल नियमों से किया जाता है।

उदाहरण 6 :

1 : $3 \times 2 = 6$

2 : $\bar{2} \times 4 = -2 \times 4 = -8 = \bar{8}$

3 : $\bar{3} \times \bar{2} = -3 \times (-2) = 6$

4 : $2 \times \bar{3} = 2 \times (-3) = -6 = \bar{6}$

5 : $\bar{4} \times 3 = -4 \times 3 = -12 = \overline{12}$

6 : $4 \times \bar{5} = 4 \times (-5) = -20 = \overline{20}$

7 : $\bar{3} \times \bar{4} = (-3) \times (-4) = 12$

13·3·5 : निष्कर्ष :

(1) हम विनकुलम् संख्याओं से अधिक परिचित नहीं हैं इसलिये हमें इन संख्याओं की विभिन्न क्रियाओं का अधिक अभ्यास करना चाहिये।

(2) यद्यपि विनकुलम् को सामान्यतया नहीं पढ़ाया जाता

है तो भी यह एक रोचक तथ्य है कि इसे कम्प्यूटर में भी प्रयोग किया जाता है।

(3) यदि विनकुलम् का प्रयोग किया जाये तो बहुत-सी क्रियायें अत्यन्त ही सरल हो जाती हैं। इसे हम आगे के खण्डों में व पुष्प 2 में भी और विस्तार में स्पष्ट करेंगे।

13·4 : विनकुलम् संख्याओं की प्रक्रियायें (भाग–2)

13·4·1 : परिचय : पिछले खण्ड में हमने बीजगणित के सरल नियमों का पालन करते हुए विनकुलम् संख्याओं के योग, घटा एवं गुणा की विधियों को जाना। सभी उदाहरणों में किसी प्रकार की कोई हासिल लेने की आवश्यकता नहीं हुई थी। सामान्यतया अंकों के 5 से अधिक होने पर ही हासिल का प्रयोग करना पड़ता है परन्तु यह भी पूर्ण सत्य नहीं है। यह कोई आवश्यक नहीं है कि विनकुलम् युक्त संख्या के सभी अंक 5 अथवा 5 से कम हो। विनकुलम् संख्या में दोनों धनात्मक और ऋणात्मक अंक होते हैं और ऋणात्मक संख्याओं को एक बार (—) से दिखाते हैं

13·4· : विनकुलम् संख्याओं का जोड़ (भाग–2) : विनकुलम् संख्याओं को जोड़ते समय कभी-कभी हासिल का प्रयोग होता हैं। अतः इसे वैदिक विधि से शुद्धः सूत्र से करते हैं। फिर भी विनकुलम् युक्त संख्यों में दो प्रकार के स्थितियां उत्पन्न हो सकती हैं। प्रथम, जब धनात्मक अंकों का योग 9 से अधिक आता है तो हम शुद्धः कहते हैं और उस स्तम्भ में एक अंक के ऊपर बिन्दु (·) रख देते हैं और इकाई का अंक उसी रूप में रख दिया जाता है। द्वितीय स्थिति वह है जिसमें ऋणात्मक अंकों का योग 9 से अधिक आता है। इसमें भी पुनः शुद्धः का उच्चारण करते हैं और अन्तिम ऋणात्मक अंक के ऊपर एक

बिन्दु (·) रख देते हैं एवं दहाई के अंक में 1 जोड़ते हैं। इकाई के अंक को उसी रूप में आगे प्रयोग करते हैं। योगफल में यह अंक ऋणात्मक होगा अतः इसे बार (—) के साथ ही रखेंगे। आगे धनात्मक अंकों की प्रक्रिया में अगले स्तम्भ में जोड़ा गया 1 धनात्मक होगा। इसी प्रकार ऋणात्मक अंकों की प्रक्रिया में अगले स्तम्भ में जोड़ा गया 1 ऋणात्मक अंक है। नीचे दिये गये उदाहरणों से यह पूर्णतः स्पष्ट हो जायेगा।

उदाहरण 7 :

$$\begin{array}{r} 3\ \bar{2}\ \dot{5}\ 4 \\ 2\ 5\ 6\ \bar{3} \\ \hline 1\ 1 \end{array}$$

चरण 1 : इकाई के स्थान पर $4+\bar{3}=1$

चरण 2 : $5+6=11$ तो हम शुद्धः का उच्चारण करते हैं और 5 के ऊपर एक बिन्दु रख देते हैं और इकाई के स्थान पर केवल 1 रखते हैं।

चरण 3 : यहां पर $\dot{5}$ के ऊपर एक बिन्दु उपस्थित है अतः हमें अगले स्तम्भ में 1 हासिल लेना है। इसलिये सैकड़े के स्थान पर धनात्मक अंक 5 को 1 बढ़ाने से $5+1=6$

$$6+\bar{2}=6-2=4$$

चरण 4 : $2+3=5$ अतः उत्तर है 5411

$$\begin{array}{r} 3\ \bar{2}\ \dot{5}\ 4 \\ 2\ 5\ 6\ \bar{3} \\ \hline 5\ 4\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$$

उदाहरण 8 :

$$\begin{array}{r} 4\ \bar{2}\ \dot{\bar{5}}\ 3 \\ 5\ 3\ \bar{5}\ \bar{4} \\ \hline 9\ 0\ 0\ \bar{1} \\ \hline 8\ 9\ 9\ 9 \end{array}$$

चरण 1 : $3+\bar{4}=\bar{1}$

चरण 2 : $\bar{5}+\bar{5}=\bar{1}0$, $\bar{1}\bar{0}$, $\bar{9}$ से अधिक ह तो शुद्धिकरण आवश्यक है तो $\bar{5}$ के ऊपर एक बिन्दु (·) रखते हैं और $\bar{1}$ को उच्च स्थान की ओर स्थानान्तरित करते हैं।

चरण 3 : $3+\bar{1}=2$ ($\bar{1}$, $\bar{5}$ के ऊपर शुद्धिकरण के कारण हैं) आगे $2+\bar{2}=0$.

चरण 4 : $4+5=9$

उत्तर 900 $\bar{1}$ और सामान्य बनाने पर उत्तर=8999

13·4·3 : विनकुलम् संख्याओं का घटाना (भाग–2) :

विनकुलम् संख्यओं को घटाते समय किसी प्रकार का हासिल लेने की कोई आवश्यकता नहीं है इसके स्थान पर 'शुद्धः' सूत्र, जिसको पहले ही समझाया जा चुका है, का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण 9 :—

$$\begin{array}{r} 3\ \dot{\bar{5}}\ 2\ \dot{\bar{4}} \\ -2\ 5\ 1\ 6 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

चरण 1 : इकाई के स्थान पर $\bar{4}-6=-10$ 'शुद्धः' का उच्चारण है और $\bar{1}$ को अगले स्तम्भ में स्थानान्तरित करते हैं और 0 को इकाई के स्थान पर रखते हैं। $\bar{4}$ के ऊपर एक बिन्दु रखते हैं।

चरण 2 : प्रथम स्तम्भ में शुद्धिकरण बिन्दु हाने के कारण

$$2 - 1 = 1 \text{ पुन: } 1 - 1 = 0$$

अथवा $\quad 1 + 1 = 2$ और $2 - 2 = 0$

चरण 3 : $\bar{5} - 5 = -10$

$\bar{5}$ के ऊपर एक बिन्दु रखते हैं और 0 को उत्तर में रखते हैं।

चरण 4 : $3 - 1 = 2$ और $2 - 2 = 0$, जैसा कि चरण 2 में किया था अतः प्राप्त उत्तर 0 0 0 0 है।

उदाहरण 10 :

$$\begin{array}{r} 4\;\bar{5}\;\dot{3}\;3\;\dot{\bar{7}} \\ -2\;\bar{5}\;\bar{8}\;\bar{7}\;4 \\ \hline 2\;1\;1\;9\;\bar{1} \\ \hline \end{array}$$

चरण 1 : इकाई के स्थान पर $\bar{7} - 4 = -7 - 4 = \bar{1}\bar{1}$ 'शुद्धः' कहने पर $\bar{7}$ के ऊपर बिन्दु रखा। $\bar{1}$ को स्थानान्तरित किया और $\bar{1}$ उत्तर में होगा।

चरण 2 : $\bar{1}$ को दहाई के स्तम्भ में प्रतिस्थापित किया था अतः $3 - 1 = 2$ एवं $2 - \bar{7} = 2 - (-7) = 9$

चरण 3 : $3 - \bar{8} = 3 + 8 = 11$ 'शुद्धः' कहने पर 3 के ऊपर एक बिन्दु रखा, 1 को स्थानान्तरित किया तथा उत्तर में 1 रखा।

चरण 4 : $\dot{3}$ के ऊपर 'शुद्धः' बिन्दु होने के कारण या तो घटायी जाने वाले अंक को 1 बढ़ा देते हैं अथवा, ऊपर वाले अंक में 1 जोड देते हैं। $\quad 1 - \bar{5} = 1 + 5 = 6$ और $6 - 5 = 1$

चरण 5 : $4 - 2 = 2$

उदाहरण 11 :

$$\begin{array}{r} 3\,\dot{\bar{4}}\,\dot{\bar{5}}\,\dot{\bar{4}}\,4 \\ -\;1\,5\,4\,6\,\bar{5} \\ \hline 1\,0\,0\,0\,9 \\ \hline \end{array}$$

चरण 1 : इकाई के स्थान पर $4-\bar{5}=4+5=9$

चरण 2 : $\bar{4}-(6)=\bar{1}\bar{0}$ (शुद्ध:) शून्य रखा

चरण 3 : (क) $-5+(-1)=-6$

(ख) $-6-(+4)=-10$ अथवा $\bar{1}\bar{0}$ (शुद्ध:) शून्य उत्तर में होगा

चरण 4 : (क) $-4-1=-5$

(ख) $-5-5=\bar{1}\bar{0}$ (शुद्ध:) शून्य को उत्तर में रखा।

चरण 5 : (क) $3-1=2$

(ख) $2-1=1$

$$\begin{array}{r} 3\,\dot{\bar{4}}\,\dot{\bar{5}}\,\dot{\bar{4}}\,4 \\ 1\,6\,4\,6\,\bar{5} \\ \hline 1\,\bar{0}\,\bar{0}\,\bar{0}\,9 \\ \hline \end{array}$$

$\bar{0}=0$

सामान्य रूप में 10009

13·4·4 निष्कर्ष :

(1) विनकुलम् संख्याओं की विभिन्न प्रक्रियाओं के उदाहरणों को हमने देखा। इससे हमें इनको विश्वासपूर्वक करने में सहायता मिलेगी।

(2) विनकुलम् के बहुत से प्रयोग है जिसके उपयोग से अंकगणितीय गणनायें बहुत सरल हो जाती है ।

(3) जाँच के लिये भी वैदिक विधि उपलब्ध है जो कि गलतियों को तुरन्त प्रकट कर देती है । इसे पुष्प–2 में अन्य विवरणों के साथ प्रस्तुत किया जायेगा ।

13·5 बीजगणितीय भाग :

भाग की क्रिया के लिये 'परावर्त्य योजयेत' वैदिक सूत्र का प्रयोग किया जाता है । इसका अर्थ है चिन्ह परिवर्तन करके उपयोग करना चाहिये । यह एक घुमावदार सूत्र है । इसके सरल पदों को नीचे दिये गये उदाहरण से स्पष्ट किया गया है ।

उदाहरण 1— $x-2$ से $5x^2+20x+14$ को भाग दो ।

(1) यहाँ भाजक में x की महत्तम घात 1 है तो शेषफल में $(1-1=0)$ x की घात वाला कोई पद नही होगा, केवल कोई पूर्णांक ही प्राप्त होगा । अब हम भाज्य में उस पद के बाद एक तिरछी लाइन खींचते हैं जिसकी घात भाजक के घात के बराबर है । यह लाइन यह दर्शाती है कि इसके दायीं ओर वाले पद शेषफल में होंगे । भाजक के प्रथम पद को छोड़कर शेष पदों के चिन्हों को बदलकर बायीं ओर लिखते हैं ।

$$
\begin{array}{lrrr}
x-2) & 5x^2 & +20x/ & +14 \\
+2 & & +10 & +60 \\
\hline
 & 5 & +30 & /+74 \\
\hline
\end{array}
$$

भागफल $5x+30$ / 74 शेषफल

(2) यहां पर प्रथम पद के गुणांक को नीचे लिखते हैं ।

(3) बदले हुए चिन्ह वाले पद को (जो कि यहाँ पर $+2$ है) नीचे लिखे गये अंक से गुणा करते हैं (जो कि यहाँ पर $+5$ है) और गुणनफल को अगले पद के नीचे लिखा जाता है। यहाँ पर $5\times2=10$ को $20x$ के नीचे रखा गया है।

(4) गुणांकों को जोड़ते हैं और योगफल को नीचे लिखते हैं— $+20+10=30$

(5) तृतीय व चतुर्थ क्रम वाली विधियों को बार-बार उपयोग में लाते हैं जब तक कि अन्तिम पद तक नहीं पहुंच जाते।

(6) अब x की घात में से भाजक के x की महत्तम घात को घटाते हैं और उसे इस गुणांक के साथ रखते हैं। तिरछी लाइन के बायीं ओर वाला पद भागफल है और दायीं ओर वाला पद शेषफल है।

उदाहरण 2—

x^2-2x+3 से $5x^4+7x^3-3x^2+15x+24$ को भाग दो।

हल—

$$
\begin{array}{lllll}
x^2-2x+3\ ) & 5x^4+7x^3-3x^2 & / & +15x+24 & \\
\quad 2 \quad -3 & \quad +10-15 & / & & \\
 & \qquad\quad +34 & / & -51 & \\
 & & / & +32 & -48 \\
\hline
 & 5 \quad +17+16 & / & -4 & -24 \\
\hline
 & 5x^2+17x+16 & / & -4x & -24
\end{array}
$$

भागफल   शेषफल

13·5·1 अंकगणितीय उपयोग—उपर्युक्त विधि अंकगणितीय प्रश्नों के लिये भी प्रयोग की जा सकती है यह निम्न उदाहरण के द्वारा स्पष्ट हो जायेगा ।

12361 को 112 से भाग दो—

1 1 2) 1 2 3 / 6 1

$\bar{1}$ $\bar{2}$ — 1–2/

–1/—2

0 0

———————————

1 1 0 / 4 1

नोट : विस्तार से यह विधिया पुष्प–2 में दी जायेंगी।

13·5·2 अन्य बीजगणितीय प्रयोग :

निम्नलिखित में से भागफल व शेषफल ज्ञात करो—

प्रयोगात्मक सूत्र — परावर्त्य योजयेत्

$$\frac{x^3 - x^2 - 7x + 4}{x - 3}$$

भागफल $= x^2 + 2x - 1$ शेषफल $= 1$

13·5·3 समीकरण को हल करो—

सूत्र—शून्य साम्यसमुच्चये

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-8} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-9}$$

उत्तर $x = \frac{5}{2}$

13·6 : केवल उर्ध्व सूत्र के प्रयोग :

वर्तमान में ही उर्ध्व सूत्र की सहायता से प्रश्नों की एक बड़ी श्रृंखला को हल किया गया है । ए० पी० निकल्स ने एक पुस्तक 'वरटीकली एवं क्रास वाईस' केवल इसी सूत्र पर लिखी है । (देखे पृष्ठ 11 संख्या 4.)

13·6·1 : सारणिक ज्ञात करो—

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

—7 –21 28= —119

यहाँ उर्ध्व सूत्र का प्रयोग किया गया है।

13·6·2 समकालीन समीकरणों के हल :

—8	4x—2y +3z	=8	—5
14	2x—3y +z	=1	—17
13	3x+2y —z	=3	4

D=33, xD=33, —yD=—33, zD=66

अत: x=y=1, z=2 (तृतीय सूत्र का प्रयोग किया गया है)

13·6·3 वक्र आलेखन :

एक ऐसे द्विघातीय वक्र का समीकरण ज्ञात करिये जो (8, 7), (6, 5) एवं (9, 4) से गुजरता है। मूल बिन्दु को (6, 5) पर प्रति स्थापित किया तीन बिन्दु के निर्देशांक (2,2) (0, 0), (3,—1)

यदि समीकरण $y=Ax^2+Bx$ है।

उर्ध्व सूत्र से $6y=-8x^2+22x$

अथवा $6y=-8x^2+118x-390$

13·6·4 : उर्ध्व सूत्र से मान ज्ञात करो—

$B={}_{c}23.51$

$B={}_{c}23.51 = 1\cdot62279\times10^{10}$

यहां पर केवल कुछ सरल उदाहरणों को ही प्रस्तुत किया गया है।

13·7 आगामी शोध :

दिक गणित के प्रयोगों की संख्या असीमित है। यूनीवर्सिटी कालेज लन्दन के प्रो० विलियम के अनुसार, "मैं वैदिक गणित में अपरिमित सामर्थ्य देखता हूं।" वैदिक गणित समाचार में प्रस्तुत शीर्षकों के अतिरिक्त पूज्य स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ जी ने अभ्यास, अनुपात, ब्याज, गति विज्ञान, स्थिति विज्ञान, जल स्थिति विज्ञान, वायु विज्ञान, यांत्रिकी, ठोस ज्यामिती, समतलीय एवं गोलीय त्रिकोणमिति, खगोल शास्त्र इत्यादि के प्रश्नों को हल करने के लिये वैदिक गणित की विधियों का भी उल्लेख किया है।

इन सभी विषयों को पुनः विकसित करने के लिये विस्तृत शोध की आवश्यकता है। आऽस आपको इस शुभ कार्य में सहयोग के लिये आमन्त्रित करती हैं।

मानवीय मस्तिष्क का सर्वांगीण विकास

आधुनिक मस्तिष्क विशेषज्ञो के मतानुसार, साधारणतया हमारे स्कूलों व कालेजों में पढ़ाए जाने वाले गणित आदि विषयों से मानव मस्तिष्क का बायाँ भाग ही विकसित व क्रियाशील होता है। मस्तिष्क का बायाँ भाग, तथ्यो को एकत्र करके क्रमबद्ध विश्लेषण कर तर्कसंगत निष्कर्ष व हल देता है। मस्तिष्क का दायाँ भाग ढांचे की पहचान करता है व इसमे अन्तर्ज्ञान प्राप्त करने की क्षमता है। वैदिक गणितीय पद्धति मे सर्वप्रथम किसी भी प्रश्न के आदर्श ढाँचे की पहचान करते हैं, व हर चरण में अनेक सम्भावनाओ में से उपयुक्त विधि का चयन करते है। शेष कार्य द्रुत गति वाली मानसिक क्रियाओ द्वारा सम्पन्न करते है। इस प्रकार मस्तिष्क का दायाँ भाग भी सुचारू रुप से विकसित होता है। वैदिक गणितीय पद्धति की स्वाभाविक मानसिक प्रणालियो के नियमित अभ्यास से मानवीय मष्तिष्क का सर्वांगीण विकास स्वतः ही होने लगता है। वैदिक गणित मानवीय मस्तिष्क लौकिक कम्पयूटर (Cosmic Computers) के लिए लौकिक साफ्ट वेयर (Cosmic Software) प्रदान करता है।

मुस्कराता गणित :

वैदिक गणित का उद्‌गम स्रोत वेद है। वेद दैवी ज्ञान है। स्वाभावतः ही वेद से विकसित होने वाले हर ज्ञान व विज्ञान मे दिव्य आनन्द विद्यमान रहता है। वैदिक गणित पद्धति अपनी सार्वभौमिक विशेषताओ के कारण गणित जैसे शुष्क विषय को तनाव रहित (anxiety free) व आनन्ददायी बनाती है। जिसे विद्यार्थी मुस्कराते हुए सीखते हैं।

"वेद सम्पूर्ण ज्ञान के अनादि-अनन्त स्रोत हैं।"

प्राचीन वैदिक गणित

मुस्कराता गणित .

उल्लेखनीय तथ्य : एक सम्पूर्ण पद्धति, सभी प्रतियोगिताओं के लिये वरदान, दृढ़ वैज्ञानिक दृष्टिकोण, अध्ययन के दृष्टिकोण में क्रान्ति, शो एवं विकास के लिए नवीन दृष्टिकोण, अंकों के विशिष्ट, अज्ञात एवं गुप्त गुणों का ज्ञान, साधारण, लघु एवं गणित की ज दुई गति की प्रणाली, विशेष पूर्व पाठ्यक्रम आवश्यक नहीं, कई बार गणक (Calculator) को भी मात करने वाली, केवल दो घन्टे प्रति दिन 11 महीने तक अभ्यास करने से भारत एवं विदेशों के 12 वर्षीय पाठ्यक्रम के समकक्ष योग्यता।

मानवीय मस्तिष्क का सर्वांगीण विकास

वैदिक गणितीय पद्धति की स्वाभाविक मानसिक प्रणालियों के निर्धारित अभ्यास से मानवीय मस्तिष्क का सर्वांगीण विकास स्वतः ही होने लगता है। वैदिक गणित मानवीय मस्तिष्क लौकिक कम्प्यूटर (Cosmic Computers) के लिए लौकिक साफ्ट वेयर (Cosmic Software) प्रदान करता है।

मूल्य : साधारण 14/- रु०
सजिल्द 20/- रु०